

饱和土体动力分析的双重网格插值算法

牛志伟 李同春 赵兰浩

(河海大学水利水电工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 饱和土体作为液固两相介质常用 Biot 方程来分析土体颗粒与孔隙水间的相互作用.但对于不排水不可压缩饱和土体,由于受 Babuska-Brezzi 稳定条件的限制,用常规的等插值 $u-p$ 混合有限元法求解基本控制方程将导致孔隙压力紊乱.针对上述情况,提出双重网格插值算法,通过对细网格中压力自由度运用插值技术,可使得独立位移自由度阶数高于独立压力自由度阶数,从而满足 Babuska-Brezzi 稳定条件,使得位移场和压力场单元插值阶数保持一致,并通过典型算例验证了该方法的正确性.

关键词 饱和土体 动力分析; Babuska-Brezzi 稳定条件; 有限元法; 双重网格插值算法

中图分类号 :TU435 **文献标识码** :A **文章编号** :1000-198X(2006)06-0683-05

土体作为一种孔隙介质材料常被作为两相介质来处理,土颗粒间的孔隙可以被空气或水填充,当孔隙完全被液体水充满时表现为完全饱和状态.土体颗粒和水体之间表现为强耦合关系,这种耦合作用在土体固结、瞬态加载及地震荷载下表现尤为突出.为了研究土体颗粒与填充水之间的相互作用,Biot^[1]基于该问题的物理特性首先提出了线弹性材料情况下土体孔隙水相互作用的比奥方程.Zienkiewicz 等^[2-3]对比奥方程进行扩展,将其推广到非线性及大变形问题中.

当土体受到地震或瞬间荷载作用时,土颗粒之间的孔隙水压力在短时间内难以消散从而表现为不排水情况,而且土颗粒相对于孔隙水表现为不可压缩性.在此种极端情况下以土体骨架位移和孔隙流体压力为基本未知量的比奥方程系数矩阵将会出现病态,用常规有限元方法直接求解比奥方程时,会出现孔隙流体压力紊乱的现象.要解决这个问题,就要满足 Babuska-Brezzi 条件(BB 条件)或与其等价辛格维茨分片插值试验^[4],此条件要求位移场插值函数的阶数要高于压力场插值函数的阶数.通常平面问题用 Q8P4 八结点四边形单元进行求解,即在 8 个结点上均存在位移自由度,而仅在 4 个角点上存在压力自由度.由于高次插值函数造成带宽大,不太适应于非线性问题的求解等缺点,不少学者为克服这个问题进行大量研究.文献[5]采用劈裂半显式交互解法使得可用位移孔隙压力等插单元成为可能.文献[6]采用强化假定应变技术克服 BB 条件,利用位移孔隙压力等插单元对土体进行固结分析.文献[7]在求解比奥耦合方程时采用分步算法,避开了 BB 条件对单元插值函数的限制.文献[8]和文献[9]对分步算法进行改进,在分步算法基础上引入迭代过程,使分步算法能有效地解决在处理瞬态荷载作用下数值计算的震荡问题.

本文提出了基于位移和压力线性等插值函数的双重网格但位移独立变量高于压力的计算方法.该方法首先建立初始网格,然后对初始网格进行自动加密,在加密后网格节点上均存在位移和压力自由度,加密后网格节点上所有位移自由度和初始网格相应位置节点上的压力自由度为求解未知量,而新生成节点上压力自由度由初始网格相应位置节点压力自由度插值得到,从而保证满足 Babuska-Brezzi 稳定条件,使得位移场和压力场单元插值阶数保持一致.

1 基本控制方程

孔隙介质(如土体)的数学模型要考虑固体骨架与孔隙流体之间的相互作用,在众多数学模型中,Biot 模型^[1-3]是最常用的一种,该模型可以考虑不饱和土体的情况.本文主要研究土体在不排水、不可压缩极限条件

下的数值解法,故假定孔隙材料为完全饱和土体,孔隙介质体积变形模量与颗粒粒子的体积变形模量之比接近于零.此情况下的 Biot 模型控制方程中将包含 (a)固体骨架的绝对位移 u (b)孔隙流体与骨架之间的相对位移 w (c)孔隙水压力 p_w .根据文献[2]在地震等动力荷载作用下可不计流体相对于土体骨架的相对加速度 $\ddot{w}$,则系统控制方程成为

$$L^T(\sigma' - mp_w) + \rho_m b - \rho_m \ddot{u} = 0 \quad (1)$$

式中: σ' ——有效应力, $\sigma' = \sigma + mp_w$, σ 为孔隙介质总应力; $m^T = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$; b ——体力; ρ_m ——混合物的密度, $\rho_m = \rho_s(1-n) + \rho_w n$, ρ_s 为固体骨架的密度, ρ_w 为孔隙流体密度, n 为孔隙率; L ——梯度算子,其表达式为

$$L^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

流体运动平衡方程为

$$m^T L \ddot{u} - \nabla^T k_w \nabla p_w + \frac{\dot{p}_w}{Q^*} + \nabla^T k_w \rho_w (b - \ddot{u}) = 0 \quad (2)$$

式中: k_w ——动力渗透矩阵; Q^* ——流体与固体的混合压缩模量,取 $\frac{1}{Q^*} = \frac{n}{K_w} + \frac{1-n}{K_s}$, K_w 为孔隙流体体积模量, K_s 为固体颗粒体积模量; ∇ ——拉普拉斯算子.

对式(1)和式(2)在空间上用 Galerkin 技术进行离散化,取位移形函数为 N_u ,压力形函数为 N_p ,可得

$$M \ddot{u} + K u - Q p_w = f_u \quad (3)$$

$$Q^T \dot{u} + H p_w + S \dot{p}_w = f_p \quad (4)$$

式中: M ——质量矩阵; K ——刚度矩阵; Q ——耦合矩阵, $Q = \int_{\Omega} (\nabla N_u)^T N_p d\Omega$; H ——渗透矩阵, $H = \int_{\Omega} k_w (\nabla N_p)^T (\nabla N_p) d\Omega$; S ——压缩矩阵, $S = \int_{\Omega} \frac{1}{Q^*} N_p^T N_p d\Omega$; f_u ——固相荷载项, $f_u = \int_{\Omega} N_u^T b \rho_m d\Omega + \int_{\Gamma} N_u^T t d\Gamma$; f_p ——液相荷载项, $f_p = \int_{\Omega} (\nabla N_p)^T k_w \rho_w b d\Omega + \int_{\Gamma} N_p^T k_w \frac{\partial p_w}{\partial n} d\Gamma$.

对式(3)和式(4)在时间域内用 Newmark 方法进行离散化,取(省去了压力 p 的下标 w)

$$\ddot{u}_{n+1} = \ddot{u}_n + \Delta \ddot{u}_n \quad \dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t \ddot{u}_n + \beta_1 \Delta t \Delta \ddot{u}_n$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{u}_n + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 \Delta \ddot{u}_n \quad (5)$$

$$\dot{p}_{n+1} = \dot{p}_n + \Delta \dot{p}_n \quad p_{n+1} = p_n + \Delta t \dot{p}_n + \theta \Delta t \Delta \dot{p}_n$$

将式(5)分别代入到式(3)和式(4)中可得如下以矩阵形式表示的控制方程

$$\begin{bmatrix} M + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 K & -\theta \Delta t Q \\ -\theta \Delta t Q^T & -\frac{\theta}{\beta_1} (S + \theta \Delta t H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{u}_n \\ \Delta \dot{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1}^u \\ -\frac{\theta}{\beta_1} F_{n+1}^p \end{bmatrix} \quad (6)$$

式(6)即为用有限元法求解饱和土体固结稳定的控制方程,式中

$$F_{n+1}^u = f_{n+1}^u - M \ddot{u}_n - K \left(u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{u}_n \right) + Q (p_n + \Delta t \dot{p}_n) \quad (7)$$

$$F_{n+1}^p = f_{n+1}^p - Q^T (\dot{u}_n + \Delta t \ddot{u}_n) - H (p_n + \Delta t \dot{p}_n) - S \dot{p}_n \quad (8)$$

其中 $\Delta \ddot{u}_n$ 和 $\Delta \dot{p}_n$ 为求解未知量.

在式(6)中,若 $k_w \rightarrow 0$, $Q^* \rightarrow \infty$,则方程将会变成如下形式

$$\begin{bmatrix} M + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 K & -\theta \Delta t Q \\ -\theta \Delta t Q^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{u}_n \\ \Delta \dot{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1}^u \\ -\frac{\theta}{\beta_1} F_{n+1}^p \end{bmatrix} \quad (9)$$

在式(9)中,如果总体位移自由度小于压力自由度,则求解的压力将会出现紊乱现象^[4],因此,在这种情况下,压力和位移不能采用相同阶插值函数。

2 利用双重网格插值算法求解基本控制方程

由于求解方程组(9)需要满足 BB 条件或与其等价的辛格维茨分片插值试验,通常平面问题采用 Q8P4 八结点四边形单元进行求解(图 1(a)),即在 8 个结点上均存在位移自由度,而仅在 4 个角点上存在压力自由度。由于高次插值函数带宽大,不太适应于非线性问题的求解,因此,基于文献[10]中局部非协调网格的思路,本文提出了双重网格插值算法。该算法首先建立初始网格(图 1(b)),然后对初始网格进行自动加密生成新的加密网格(图 1(c)),在新生成的网格所有结点上都存在位移自由度和压力自由度,所有位移自由度均为独立未知量,压力自由度分为独立压力自由度和非独立压力自由度,与原初始网格相应结点上的压力自由度为独立压力自由度,即图 1(c)中的 1、3、5、7 点,所有新生成结点上自由度为非独立压力自由度即图 1(c)中 2、4、6、8、9 点,这些结点上的压力值由独立压力自由度插值得到。假设单元 i 的孔隙压力列阵为 $p_i = [p_{i1} \dots p_{ij} \dots p_{in}]^T$, n 为单元 i 孔隙压力自由度总数,其中 p_{ij} 为

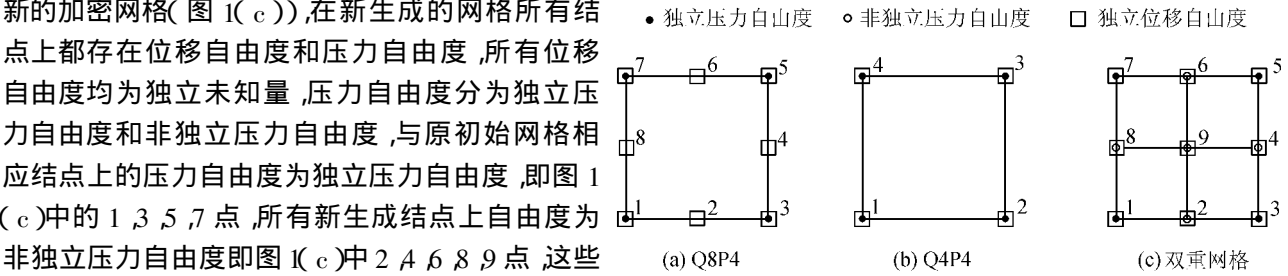


图 1 单元形式
Fig.1 Element shape

非独立压力自由度,其他为独立压力自由度。 p_{ij} 可以表示为其他独立压力自由度的线性函数,即

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} p_{ik} \tag{10}$$

式中: m ——求解 i 单元第 j 个非独立压力自由度所需要的独立压力自由度数; p_{ik} ——单元 i 中的独立压力自由度; a_{ik} ——相应的插值系数。插值系数在对 Q4P4 单元网格进行加密时按文献[10]中的方法求得。基于这种思路,在建立求解方程(6)的整体系数矩阵时,对矩阵中的非独立压力自由度用式(10)表示为其他独立压力自由度的线性组合,从而降低方程组的阶数,在求得独立压力自由度后,再用式(10)进行回代即可求得全部结点自由度上的孔隙压力。利用这种方法,在加密后的每个单元结点上都存在位移自由度和压力自由度,可以使用位移压力等插值函数,但只有独立的压力自由度参与方程的求解,由于参与方程求解的位移自由度数多于压力自由度数,即可认为位移插值函数的“阶数”高于压力插值函数的“阶数”,故能满足 BB 条件或与其等价的辛格维茨分片插值试验,从而保证求解结果的稳定性。

3 算 例

以文献[8]中的算例为例,用本文的双重网格插值算法对饱和土柱进行分析。图 2(a)为 30 m 深,1 m 宽的单位厚度饱和土柱。该土柱表面受垂直正弦荷载作用,正弦荷载 $f(t) = 1 + 0.25\sin(20\pi t)$ kN/m,如图 2(b)所示。边界条件为 (a)土柱顶部 $p = 0, q = f(t)$ (b)两侧边垂直边界 $u_x = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = 0$ (c)底部 $u_x = u_y = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = 0$ 。

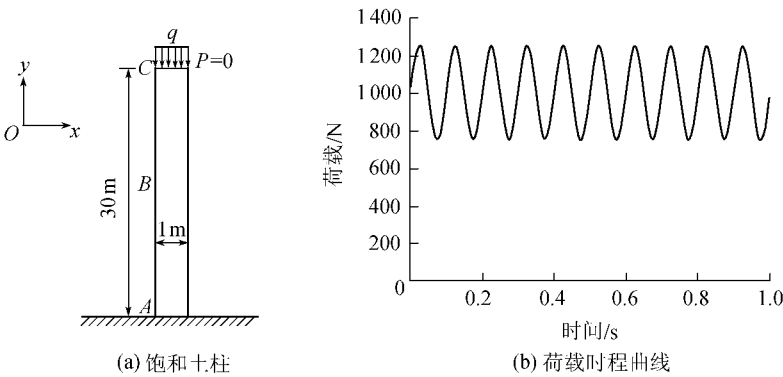


图 2 顶部受垂直荷载作用的土柱

Fig.2 Soil column with vertical load on the top

假定材料为线弹性体,为了便于结果对比,材料参数取与文献[8]一致,弹性模量 $E = 1 \times 10^7$ Pa,泊松比 $\mu = 0.2$,土颗粒密度 $\rho_s = 2000$ kg/m³,孔隙水密度 $\rho_w = 1000$ kg/m³,孔隙率为 0.3.考虑孔隙流体为不可压缩,同时渗透系数取为零,此时,BB 条件或其等价辛格维茨分片插值试验将起作用.为了说明这一现象,本文采用了 3 种单元网格进行计算,如图 3 所示.图 3(a)位移为 8 结点四边形单元、压力为 4 结点四边形单元即 Q8P4 单元,图 3(b)位移和压力均为 4 结点四边形单元即 Q4P4 单元,图 3(c)对 Q4P4 单元进行加密,在加密后的网格所有结点上均存在位移自由度和压力自由度,所有结点位移自由度均独立,而只有与原 Q4P4 单元相应结点上的压力自由度独立,所有新生成结点上压力自由度由独立的压力自由度插值得到,即双重网格.

图 4 为土柱在垂直动力分布荷载作用下孔隙水压力沿土桩深度分布($t = 0.5$ s).图 4(a)位移为二次插值,孔隙压力为线性插值,即 Q8P4 单元的计算结果,由于单元满足 BB 条件,故孔隙压力沿土柱深

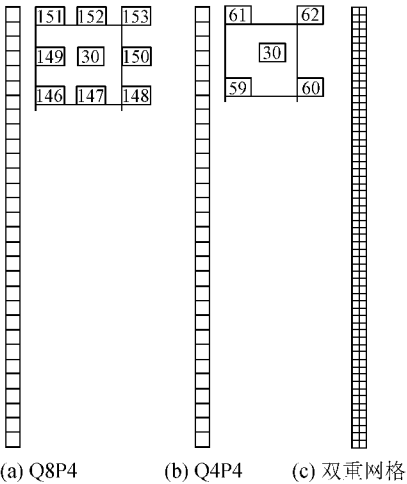


图 3 土柱网格单元形式
Fig.3 Element shape of soil column

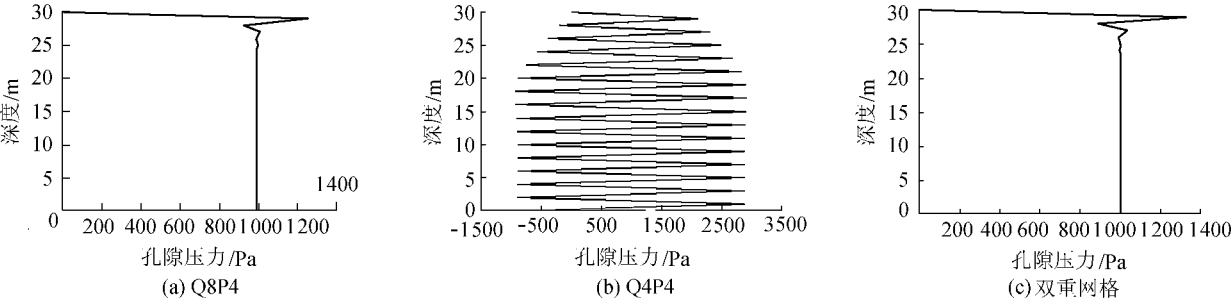


图 4 土柱孔隙水压力沿高程分布($t = 0.5$ s)

度分布稳定^[8].图 4(b)位移和压力均为线性插值,单元不满足 BB 条件,其计算结果孔隙压力沿土柱深度震荡,震荡程度随混合物压缩模量 Q^* 的增大而增大^[6].图 4(c)为采用本文提出的双重网格插值算法的计算结果,所有结点上存在位移自由度,而只有部分结点上的孔隙压力自由度独立,非独立孔隙压力自由度上值由独立孔隙压力自由度插值得到,从而使得位移自由度插值函数的阶数高于压力自由度插值函数的阶数,这样就可满足 BB 条件的要求,进而得到稳定的计算结果.

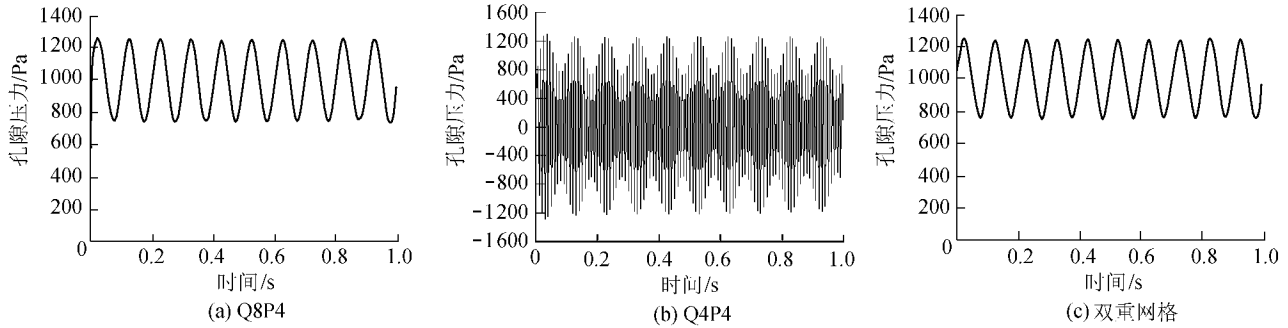


图 5 土柱 B 点孔隙压力随时间变化曲线
Fig.5 Pore pressure vs. time at node B

图 5 为土柱上 B 点孔隙压力随时间变化曲线,由于 Q8P4 单元和本文提出的方法满足 BB 条件,因此,所得的计算结果是稳定的,而利用位移和压力均为线性插值的 Q4P4 单元所求得的孔隙压力随时间变化会出现强烈震荡.

4 结 论

本文提出的双重网格插值算法通过对初始网格进行加密,将加密后网格结点上压力自由度分为独立压力自由度和非独立压力自由度,只有独立压力自由度参与方程组求解,而非独立压力自由度上压力值由独立压力自由度插值得到。采用该方法求解联立耦合方程组时,由于参与求解的位移自由度多于压力自由度,故能满足BB条件,得到稳定的求解结果。另外,由于加密后的网格仍然为四结点四边形网格,从而可以使用位移压力等插值单元求解不排水不可压缩条件下土体-孔隙流体相互作用问题。用本文提出的计算方法对受动力荷载作用的土柱进行验算,所得结果与Q8P4高次单元计算的结果非常吻合,说明所提出的双重网格插值算法是可行的。

参考文献:

- [1] BIOT M A. Theory of elasticity and consolidation for porous anisotropic solid[J]. J Appl Phys, 1955, 26: 182-185.
- [2] ZIENKIEWICZ O C, CHAN C T, BETTESS P. Drained, undrained, consolidating dynamic behaviour assumptions in soils[J]. Geotechnique, 1980, 30: 385-395.
- [3] ZIENKIEWICZ O C, CHAN A H C, PASTOR M. Static and dynamic behavior of soils: a rational approach to quantitative solutions. I: Fully saturated problems[J]. Proc R Soc Lond, 1990, A294: 285-309.
- [4] CHAPELLE D, BATHE K J. The inf-sup test[J]. Computers & Structures, 1993, 47(4-5): 537-545.
- [5] 李同春, 刘骁青. 不排水不可压缩条件下土体——孔隙流体相互作用的半显式交互解法[J]. 四川水力发电, 1997, 16(2): 30-35.
- [6] MIRA P, PASTOR M. A new stabilized enhanced strain element with equal order of interpolation for soil consolidation problems[J]. Comput Meth Appl Mech Engrg, 2003, 192(6): 4257-4277.
- [7] PASTOR M, Li T, LIU X, et al. A fractional step algorithm allowing equal order of interpolation for coupled analysis of saturated soil problem[J]. Mech Cohes Frict Mater, 2000(5): 511-534.
- [8] 韩先洪, 李锡夔. 饱和土动力学有限元分析的改进稳定分步算法[J]. 计算力学学报, 2004, 21(3): 277-284.
- [9] LI Xi-kui, HAN Xian-hong, PASTOR M. An iterative stabilized fractional step algorithm for finite element analysis in saturated soil dynamics[J]. Comput Meth Appl Mech Engrg, 2003, 192(6): 3845-3859.
- [10] 李同春, 李森, 温召旺, 等. 局部非协调网格在高拱坝应力分析中的应用[J]. 河海大学学报: 自然科学版, 2003, 31(1): 42-45.

Double-mesh interpolation method for dynamic analysis of saturated soil

NIU Zhi-wei, LI Tong-chun, ZHAO Lan-hao

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract Biot equation is often used for analysis of the interaction between soil skeleton and pore water of saturated soil, which is taken as a fluid-solid two-phase media. On the other hand, under the restriction of Babuska-Brezzi stability condition, the conventional FEM based on u - p formula of equal-interval interpolation will lead to spurious oscillation of pore pressure when it is used for dealing with undrained-incompressible saturated soil. In consideration of the above fact, a double-mesh interpolation method was proposed. The application of the interpolation technique to degree of freedom (DOF) of pore pressure in fine meshes makes the order of DOF of independent displacement higher than that of independent pressure, so that the Babuska-Brezzi stability condition can be satisfied, and the orders of element interpolation for displacement field and pressure field are in agreement with each other. The correctness of the present method is verified by a typical calculation example.

Key words saturated soil; dynamic analysis; Babuska-Brezzi stability condition; FEM; double-mesh interpolation method