

TSP 最短路径的必要条件初探

洪玉振

(河海大学商学院,江苏 南京 210098)

摘要 对于被访问城市数为 n 的不对称旅行商问题,构造了一个 n 行和 n 列的方阵,每一行上的 n 个元素为同一个被访问城市,每一列上的 n 个元素为 n 个互不相同的被访问城市.依次从该方阵的第一列到第 k 列上各取出一个城市,同一行上不存在两个被取出的城市,这样取出的城市序列就构成了一条长度为 k 的路径.主要讨论最短路径的性质.如果一条长度为 $(n-1)$ 的最短路径能被产生,则该路径上的任一长度为 k 的路径都为最短路径, $k=1,2,\cdots,n-2$.该性质为旅行商问题算法研究的基础.

关键词 TSP 顶点 方阵 路径 最短路径

中图分类号 O224 文献标识码 A 文章编号 1000-1980(2006)06-0717-04

旅行商问题(TSP)为顺序访问给定的城市集合,每个城市被访问一次且仅一次,然后回到起始城市,其目标是找出总路程最短的行程安排. TSP 的应用范围很广,问题的规模可以很大,Michalewicz 等^[1],^①提供了这方面的详细资料.由于 TSP 是 NP 难题,不存在能解决它的所有实例的多项式时间算法,Gamboa 等^[2]论述了用启发式算法或近似算法来获取其满意解的绝对必要性. Fredman 等^[3]指出了这类算法的本质是基于局部优化原理.用某种启发式规则(如贪婪法^[4])构造一初始的行程安排,然后反复对它进行局部改进. TSP 也是演化计算领域中的一个热点,有关 TSP 的演化算法研究可参阅文献^[5,6].

旅行商的路径为一个城市序列,它规定了访问城市的次序.为了分析旅行商的路径性质,本文将旅行商路径划分为两个部分:被旅行商访问的城市序列和指定旅行商避开城市集合.前者是有序的,而后者是无序的.为了便于定理的理解和证明,也为了明确阐述旅行商最短路径的生成过程,将出发和返回的城市单独置于第 0 列,而将 n 个被访问城市安排成一个 n 行和 n 列的方阵.同一行上的 n 个城市是相同的,同一列上的 n 个城市是两两不同的.规定旅行商第 k 个访问的城市在方阵的第 k 列上.这样,依此从方阵中的第一列到第 n 列上分别取出一个城市,且任何两个被取出的城市位于不同的行,则 n 个被取出的城市有序序列可组成任一可能的旅行商完整路径.由于本文讨论的是不对称旅行商问题,这样取出的城市序列就有 $n!$ 种.

本文主要探讨了长度为 $(n-1)$ 的最短路径的必要条件,为旅行商问题的算法研究提供基础.

1 符号和定义

有 $(n+1)$ 个城市 $v(0),v(1),\cdots,v(n)$,若城市 $v(i)$ 有一条直接的路径到城市 $v(j)$,则给定路径的长度 $d(i,j)<+\infty$,否则, $d(i,j)=+\infty$. $d(i,j)\neq d(j,i)$ 是允许的,这里 $i,j\in[0,n]$ 且 $i\neq j$.旅行商从城市 $v(0)$ 出发访问每个城市一次且仅一次,然后回到城市 $v(0)$.如图 1 所示,将 n 个城市 $v(1),v(2),\cdots,v(n)$ 布置成一个 n 行和 n 列的方阵,并将城市 $v(0)$ 置于第 0 列.

在图 1 中,引入如下定义和符号.

顶点 $v(p_j,j)$ 为位于第 j 列和第 p_j 行的城市, $j\in[1,n]$,

列号	0	1	$\cdots$	$n-1$	n	行号
		$v(1)$	$\cdots$	$v(1)$	$v(1)$	1
	$v(0)$	$v(2)$	$\cdots$	$v(2)$	$v(2)$	2
		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$v(n)$	$\cdots$	$v(n)$	$v(n)$	n

图 1 顶点的布置

Fig.1 Arrangement of verticex

收稿日期 2005-06-20

作者简介 洪玉振(1957—),男,江苏东台人,副教授,硕士,主要从事管理信息系统和系统工程研究.

① MICHALEWICZ Z, FOGEL D B. How to solve it: Modern heuristics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000,1999: 107-169.

$p_j \in [1, n]$. 为简化起见, 用符号 $v(p_j)$ 表示 $v(p_j, j)$. 符号 p_j 仅表示 $v(p_j)$ 所在行的编号. 另外, 当 $j = 0$ 时, $p_0 = 0, q_0 = 0, r_0 = 0$, 它们都为起始城市 $v(0)$ 的编号.

Γ_k 第 k 列上顶点的集合.

路径: $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \rangle \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g, k \in [1, n-1], g \in [1, n-k]$, 它表示旅行商从 $v(p_0)$ 出发, 避开城市 $r_1, r_2, \dots, r_g$ (亦即, 避开行 $r_1, r_2, \dots, r_g$ 上的顶点), 依次经过 $v(p_1), v(p_2), \dots, v(p_{k-1})$, 最后到达 $v(p_k)$. 当 $i \neq j$ 时, $p_i \neq p_j, i, j \in [0, k]; r_i \neq r_j, i, j \in [1, g]$ 且

$$\{p_1, p_2, \dots, p_k\} \cap \{r_1, r_2, \dots, r_g\} = \emptyset \quad (1)$$

$$\{p_1, p_2, \dots, p_k\} \cup \{r_1, r_2, \dots, r_g\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \quad (2)$$

其中, $\emptyset$ 表示空集.

S_k 到第 k 列上所有顶点的路径 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \rangle \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g$ 的集合, 这些路径都避开指定的城市 $r_1, r_2, \dots, r_g$.

路径的权 定义路径 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \rangle \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g$ 的权为旅行商从 $v(p_0)$ 出发, 依次经过 $v(p_1), v(p_2), \dots, v(p_{k-1})$ 到达 $v(p_k)$ 的路程, 亦即

$$w(p_0, p_1, \dots, p_k) = \sum_{j=1}^k d(p_{j-1}, p_j) \quad (3)$$

定义 1 如果

$$w(p_0, p_1, \dots, p_k) = \min \{w(q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, p_k) / \langle v(q_0), v(q_1), \dots, v(q_{k-1}) \rangle \not\subset p_k, r_1, r_2, \dots, r_g > \in S_{k-1}\} \quad (4)$$

则定义 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \rangle \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g$ 为最短路径.

旅行商访问第 k 个城市前必须先访问第 $(k-1)$ 个城市, 因此, 到第 k 列上顶点的任一路径必须经过第 $(k-1)$ 列上的某一顶点. 用 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \rangle / v(p_{k-1}) \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g$ 表示经过第 $(k-1)$ 列上指定顶点 $v(p_{k-1})$ 到第 k 列上顶点 $v(p_k)$ 的路径.

定义 2 如果

$$w(p_0, p_1, \dots, p_k) = \min \{w(q_0, q_1, \dots, q_{k-2}, p_{k-1}, p_k) / \langle v(q_0), v(q_1), \dots, v(q_{k-2}) \rangle \not\subset p_{k-1}, p_k, r_1, r_2, \dots, r_g > \in S_{k-2}\} \quad (5)$$

则定义 $\langle v(q_0), v(q_1), \dots, v(q_{k-1}), v(p_k) \rangle / v(q_{k-1}) \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g$ 为最短路径.

因此, 当 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_{k-1}), v(p_k) \rangle / v(p_{k-1}) \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g$ 为最短路径时, 若 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \rangle \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g$ 为最短路径, 则

$$w(p_0, p_1, \dots, p_k) = \min \{w(q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, p_k) / v(q_{k-1}) \in \Gamma_{k-1}\} \quad (6)$$

2 最短路径的必要条件

2.1 必要条件 I

定理 1(必要条件 I) 如果 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_{n-1}) \rangle \not\subset p_n$ 是最短路径, 则对于任一 $k \in [1, n-2]$, $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \rangle \not\subset p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n$ 是最短路径.

证明 若 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \rangle \not\subset p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n$ 不是最短路径, 则另一条路径 $\langle v(q_0), v(q_1), \dots, v(q_{k-1}), v(p_k) \rangle \not\subset p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n$ 存在且满足

$$w(p_0, p_1, \dots, p_k) > w(q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, p_k) \quad (7)$$

注意到这 2 条路径避开相同的城市集合, 根据式(3)和式(7)产生

$$w(p_0, p_1, \dots, p_{n-1}) > w(q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, p_k, \dots, p_{n-1}) \quad (8)$$

这与 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_{n-1}) \rangle \not\subset p_n$ 为最短路径的假设矛盾.

2.2 必要条件 II

为引入引理 1, 首先定义以下命题.

a. $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \rangle \not\subset p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n$ 能被产生.

- b. $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \not\subset p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n \rangle$ 是最短路径.
- c. $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k)/v(p_{k-1}) \not\subset p_n \rangle$ 是最短路径.
- d. $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \not\subset p_n \rangle$ 是最短路径.

引理 1 $a \wedge b \wedge c \rightarrow d, k \in [2, n-1]$.

证明 根据李小克^[7]的推导, 以下公式成立

$$(a \wedge b \wedge c \rightarrow d) \leftrightarrow (\bar{d} \wedge b \wedge c \rightarrow \bar{a}) \tag{9}$$

当 $\bar{d}$ 成立时, 需要考虑以下情况.

情况 1 根据命题 c, 路径 $\langle v(q_0), v(q_1), \dots, v(q_{k-1}), v(p_k) \not\subset p_n \rangle$ 存在且满足式(7).

情况 2 根据命题 b, 最短路径 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \not\subset q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_{k+g} \rangle$ 存在, 这里

$$\{q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_{k+g}\} \subseteq \{p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n\} \tag{10}$$

且当 $g = 1$ 时, $q_{k+1} \neq p_n$.

对于情况 1, 存在行 $q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_{n-1}$ 使得 $\langle v(q_0), v(q_1), \dots, v(q_{k-1}), v(p_k) \not\subset q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_{n-1}, p_n \rangle$ 也是一条路径, 根据命题 b 和式(7),

$$\{q_1, q_2, \dots, q_{k-1}\} \neq \{p_1, p_2, \dots, p_{k-1}\} \tag{11}$$

亦即

$$\{q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_{n-1}\} \cap \{p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_{n-1}\} \neq \emptyset$$

否则

$$\langle v(q_0), v(q_1), \dots, v(q_{k-1}), v(p_k) \not\subset p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n \rangle$$

也是一条满足式(7)的路径, 这与命题 b 矛盾, 因此, 对于情况 1, $\bar{a}$ 成立.

对于情况 2, $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k)/v(p_{k-1}) \not\subset q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_{k+g} \rangle$ 是最短路径, 而 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_{k-1}), v(p_k)/v(p_{k-1}) \not\subset p_n \rangle$ 不是, 这与命题 c 矛盾. 因此, 没有情况 2.

引理 2 如果 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_{k-1}) \not\subset p_n \rangle$ 为最短路径, 那么对于任一满足 $p_k \in [1, n], d(p_{k-1}, p_k) < +\infty$ 和 $p_k \notin \{p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, p_n\}$ 的行 p_k , $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_{k-1}), v(p_k)/v(p_{k-1}) \not\subset p_n \rangle$ 是最短路径.

证明 如果 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_{k-1}), v(p_k)/v(p_{k-1}) \not\subset p_n \rangle$ 不是最短路径, 那么存在另一条路径 $\langle v(q_0), v(q_1), \dots, v(q_{k-2}), v(p_{k-1}), v(p_k)/v(p_{k-1}) \not\subset p_n \rangle$ 满足

$$w(p_0, p_1, \dots, p_k) > w(q_0, q_1, \dots, q_{k-2}, p_{k-1}, p_k) \tag{12}$$

从式(12)的两边减去 $d(p_{k-1}, p_k)$ 后, 得 $w(p_0, p_1, \dots, p_{k-1}) > w(q_0, q_1, \dots, q_{k-2}, p_{k-1})$, 这与假设矛盾.

定理 2(必要条件 II) 最短路径 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_{n-1}) \not\subset p_n \rangle$ 能被产生, 则对于任一 $k \in [1, n-2]$, $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \not\subset p_n \rangle$ 必须是最短路径.

证明 $\langle v(p_0), v(p_1) \not\subset p_n \rangle$ 是最短路径.

假定 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_{k-1}) \not\subset p_n \rangle$ 是最短路径. 最短路径 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_{n-1}) \not\subset p_n \rangle$ 能被产生时: (a) 根据定理 1, 最短路径 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \not\subset p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n \rangle$ 能被产生; (b) 根据引理 2, $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k)/v(p_{k-1}) \not\subset p_n \rangle$ 为最短路径.

因此, 根据引理 1, $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_k) \not\subset p_n \rangle$ 是最短路径.

3 结 语

图 1 中的顶点布置表明了旅行商最短路径的生成过程. 笔者将另文探讨用图来表示到每个顶点的所有最短路径, 从而获得一个新的 TSP 算法.

参考文献:

[1] FOGEL D B. Applying evolutionary programming to selected traveling salesman problems[J]. Cybernetics and Systems, 1993, 24(1): 27-

36.

- [2] GAMBOA D, REGO C, GLOVER F. Data structures and ejection chains for solving large-scale traveling salesman problems[J]. European Journal of Operational Research, 2005, 160: 154-171.
- [3] FREDMAN M L, JOHNSON D S, MCGEOCH L A, et al. Data structures for traveling salesmen[J]. Journal of Algorithms, 1995, 18: 432-479.
- [4] FRIEZE A M. Worst-case analysis of algorithms for travelling salesman problems[J]. Methods Oper Res, 1979, 32: 97-112.
- [5] MÜHLENBEIN H, GORGES-SCHLEUTER M, KRÄMER O. Evolution algorithms in combinatorial optimization[J]. Parallel Computing, 1998, 7: 65-85.
- [6] VALENZUELA C L, JONES A J. Evolutionary divide and conquer(I): A novel genetic approach to the TSP [J]. Evolutionary Computation, 1994, 1(4): 313-333.
- [7] 李小小. 普通逻辑教程[M]. 北京: 首都经济贸易大学出版社, 2005: 147-183.

Necessary condition for shortest path of TSP

HONG Yu-zhen

(Business School, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract For the asymmetrical traveling salesman problem (TSP) with n cities to be visited, a square matrix with n rows and n columns was constructed. Different vertex in each row represented the same city, and n vertex in each column represented n different cities. Taking one city from each column of the 1st column to the k^{th} column in this matrix with only one city at most taken from a row, the k cities formed a traveling salesman's path with length k . It is deduced that, if the shortest path with length $n-1$ was found, any path of length k ($k = 1, 2, \dots, n-2$) on this path was definitely the shortest path. The result provides a basis for further study of the algorithm for the traveling salesman problem.

Key words traveling salesman; vertices; square matrix; path; shortest path