

一类带有第三类边值问题的非局部椭圆方程解的存在性

辛奎东, 陈才生

(河海大学理学院, 江苏 南京 210098)

摘要 研究了带有第三类边值问题的非局部椭圆方程解的存在性. 首先构造出问题的格林函数并定义相应的锥, 然后利用锥不动点理论证明了径向正解的存在性.

关键词 非局部问题; 保锥算子; 格林函数

中图分类号 O175.25

文献标识码 A

文章编号 1000-198X(2007)01-0118-03

Stanczy^[1]利用锥不动点理论研究了区域 $\Omega = (0, 1)$ 和 Ω 为球环 ($n \geq 3$) 的非局部椭圆方程^[2-11]

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = M \frac{(\int_{\Omega} \varphi)^{\alpha}}{(\int_{\Omega} \varphi)^{\beta}} & (\text{in } \Omega \subset R^n) \\ \varphi = 0 & (\text{on } \partial\Omega) \end{cases}$$

解的存在性. 本文研究区域 $\Omega \subset R^n$ ($n \geq 3$) 的带有第三类边值问题的非局部椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(\|u\|_q)g(u(x)) & (\text{in } \Omega) \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0 & (\text{on } \partial\Omega) \end{cases} \quad (1)$$

解的存在性, 其中 $\Omega = \{x \in R^n \mid a \leq |x| \leq b\}$, $a > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$. 如果考虑问题(1)的径向解的存在性, 那么问题(1)可转化为

$$\begin{cases} -u''(t) - \frac{n-1}{t}u'(t) = g(u(t))f(\|u\|_q) & (a < t < b) \\ -\alpha u'(a) + \beta u(a) = 0 \\ \alpha u'(b) + \beta u(b) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

这里 $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$, $\|u\|_q = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$.

本文首先运用 Sturm 定理^[13]找出问题(2)的格林函数, 然后在 Banach 空间上定义一个锥 P 和算子 S , 利用锥中的不动点理论证明问题(2)至少存在一个正解.

1 格林函数和锥的构造

由问题(2)得

$$\begin{cases} -t^{n-1}u''(t) - (n-1)t^{n-2}u'(t) = t^{n-1}g(u(t))f(\|u\|_q) & (a < t < b) \\ -\alpha u'(a) + \beta u(a) = 0 \\ \alpha u'(b) + \beta u(b) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

应用 Sturm 定理, 可求得问题(3)的格林函数, 即

$$\alpha(t, s) = \begin{cases} \frac{[1 - A(t) + \alpha(n-2)\beta a^{-1}][1 - B(s) - \alpha(n-2)\beta b^{-1}]}{\alpha(n-2)\beta b^{-1}A'(s) + \alpha(n-2)\beta a^{-1}B'(s) + A'(s) - B'(s)} & (a \leq t < s \leq b) \\ \frac{[1 - B(t) - \alpha(n-2)\beta b^{-1}][1 - A(s) + \alpha(n-2)\beta a^{-1}]}{\alpha(n-2)\beta b^{-1}A'(s) + \alpha(n-2)\beta a^{-1}B'(s) + A'(s) - B'(s)} & (a \leq s < t \leq b) \end{cases}$$

令 $E \triangleq C[a, b]$, $\|u\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |u(t)|$, 定义锥 P :

$$P = \{u \in E | u(t) \geq 0, t \in [a, b], \inf_{t \in [a_1, b_1]} u(t) \geq c \|u\|_\infty\}$$

其中

$$c = \frac{\min\{\alpha(b_1^{-1})^{n-2} + \alpha(n-2)(\beta b)^{-1} - 1, 1 - (\alpha a_1^{-1})^{n-2} + \alpha(n-2)(\beta a)^{-1}\}}{\max\{\alpha(ba^{-1})^{n-2} + \alpha(n-2)(\beta b)^{-1} - 1, 1 - (\alpha b^{-1})^{n-2} + \alpha(n-2)(\beta a)^{-1}\}}$$

构造积分算子 $S: P \rightarrow E$, 定义:

$$Su(t) = \int_a^b \alpha(t, s)g(u(s))ds \quad (4)$$

问题(3)有解当且仅当 $Su = u$, 即算子 S 在锥 P 中有不动点.

下面证明: $\forall u \in P, Su \in P$. 设 $g(u(s)) > 0, f(\|u\|_q) > 0$.

$$\begin{aligned} \inf_{t \in [a_1, b_1]} Su(t) &= \inf_{t \in [a_1, b_1]} \int_a^b \alpha(t, s)g(u(s))ds \geq \\ &= c \sup_{t \in [a, b]} \int_a^t [1 - A(s) + \alpha(n-2)(\beta a)^{-1}] [1 - B(t) - \alpha(n-2)(\beta b)^{-1}] F(s)^{-1} g(u(s))ds + \\ &\quad \int_t^b [1 - A(t) + \alpha(n-2)(\beta a)^{-1}] [1 - B(s) - \alpha(n-2)(\beta b)^{-1}] F(s)^{-1} g(u(s))ds \\ &= c \sup_{t \in [a, b]} \|Su(t)\| = c \|Su\|_\infty \end{aligned}$$

所以, 算子 S 是将锥 P 映到自身的算子.

2 定理及相应证明

运用下面的定理^[12]来求得锥 S 的不动点.

定理 1 设 E 是 Banach 空间, P 是如上定义的锥, $P \subset E$, Ω_1 和 Ω_2 分别是 E 中的有界开集, $\rho \in \Omega_1, \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. 又设算子 $S: P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow P$ 是全连续的. 如果下面 2 个条件之一成立, 那么算子 S 在 $P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ 中至少有一个不动点.

a. 对任意的 $x \in P \cap \partial\Omega_1$, 有 $\|Sx\| \leq \|x\|$; 对任意的 $x \in P \cap \partial\Omega_2$, 有 $\|Sx\| \geq \|x\|$.

b. 对任意的 $x \in P \cap \partial\Omega_1$, 有 $\|Sx\| \geq \|x\|$; 对任意的 $x \in P \cap \partial\Omega_2$, 有 $\|Sx\| \leq \|x\|$.

定理 2 设 $f, g: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ 是连续单增函数. 如果下面的条件满足, 那么初值问题(2)存在正解.

$$(H) \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)f(\|u\|_q)}{u} < M$$

其中

$$M = \left[\sup_{t \in [a, b]} \int_a^b \alpha(t, \xi) d\xi \right]^{-1}$$

证明 由于 S 是全连续算子, 验证定理 1 中的条件 b 成立即可.

因为 $g(0) > 0, f(0) > 0$, 所以 $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(cu)f(\|u\|_q)}{u} = +\infty$. 根据极限的定义, $\forall A > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < u < \delta$ 时,

$$\frac{g(cu)f(\|u\|_q)}{u} > A$$

选取 $\delta = R_1$, 满足对任意的 $0 \leq u \leq R_1$, 有

$$g(cu)f(\|u\|_q) > \left(\int_{a_1}^{b_1} \alpha(0, \xi) d\xi \right)^{-1} u \quad (5)$$

取 $\Omega_1 = \{u \in E | \|u\|_\infty < R_1\}$, 如果 $u \in P \cap \partial\Omega_1$, 那么 $\|u\|_\infty = R_1$. 由式(5)得

$$\begin{aligned} S(u(0)) &= \int_a^b \alpha(0, \xi)g(u(s))f(\|u\|_q)ds \geq \int_{a_1}^{b_1} \alpha(0, \xi)g\left(\inf_{t \in [a_1, b_1]} u(s)\right)f(\|u\|_q)ds \geq \\ &\quad \int_{a_1}^{b_1} \alpha(0, \xi)g(c\|u(s)\|_\infty)f(\|u\|_q)ds \geq \|u(s)\|_\infty \end{aligned}$$

从而

$$\|Su\|_\infty \geq \|u\|_\infty$$

由条件 (H), 选取 $R_2 > R_1 > 0$, 对任意的 $u \geq R_2$,

$$\frac{g(u)(\|u\|_q)}{u} \leq M \quad (6)$$

取 $\Omega_2 = \{u \in E \mid \|u\|_\infty < R_2\}$, 若 $u \in P \cap \partial\Omega_2$, 有 $\|u\|_\infty = R_2$. 对任意的 $\xi \in (a_1, b_1)$, 由式(6)得

$$Su(t) = \int_a^b \alpha(t, \xi) g(u(\xi)) (\|u\|_q) d\xi \leq \int_a^b \alpha(t, \xi) g(\|u\|_\infty) (\|u\|_q) d\xi \leq$$

$$\|u\|_\infty M \int_a^b \alpha(t, \xi) d\xi = \|u\|_\infty \quad (\forall t \in [a, b])$$

因此 $\|Su\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, 对任意 $u \in P \cap \partial\Omega_2$, 故定理1的条件b满足, 从而算子 S 存在不动点 u_0 . 又由于 $f(0) > 0$, $g(0) > 0$, $u_0 \neq 0$, 条件 $\inf_{t \in [a, b]} u_0(t) \geq C \|u_0\|_\infty > 0$ 及式(4), 保证 u_0 在 $[a, b]$ 为正解, 所以问题(2)存在正的径向解.

参考文献:

- [1] STANCZY R. Nonlocal elliptic equation[J]. Nonlinear Analysis, 2001, 47: 3579-3584.
- [2] ALY J J. Thermodynamics of a two dimensional selfgravitating system[J]. Phys Rev, 1994(5): 3771-3783.
- [3] KRZYWICKI A, NADZIEJA T. Nonlocal elliptic problem[J]. Banach Center Publ, Polish Acad Sci, 2000, 52: 147-152.
- [4] KRZYWICKI A, NADZIEJA T. Nonlocal elliptic problems[J]. Banach Center Publ, Polish Acad Sci, 2000, 52: 591-595.
- [5] CAGLIOTI E, LIONS P L, MARCHIORO G, et al. A special class of stationary flows for two dimensional Euler equations: a statistical mechanics descriptor[J]. Comm Math Phys, 1992(3): 501-525.
- [6] BEBERNES J W, LACEY A A. Global existence and finite-time blow-up for a class of nonlocal parabolic problems[J]. Adv Differential Equations, 1997(6): 927-953.
- [7] CARRILLO J A. On a nonlocal elliptic equation with decreasing nonlinearity arising in plasma physics and heat conduction[J]. Nonlinear Analysis, 1998(1): 97-115.
- [8] GOGNY D, LIONS P L. Sur les états d'équilibre pour les densités électroniques dans les plasmas[J]. RAIRO Model Math Anal, 1989(23): 137-153.
- [9] LACEY A A. Thermal runaway in a nonlocal problem modeling Ohmic heating model derivation and some special cases[J]. European J Appl Math, 1995(2): 127-144.
- [10] BEBERNES J, TALAGA P. Nonlocal problems modelling shear banding[J]. Comm Appl Nonlinear Anal, 1996(3): 79-103.
- [11] BURNS T J. Does a shear band result from a thermal explosion[J]. Mechanics of Materials, 1994, 17: 261-271.
- [12] GUO D, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear problem in abstract cones[M]. Orlando: Academic Press, 1988.
- [13] 阮秉礼. 常微分方程补充教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1986.

Existence of solutions to a class of non-local elliptic equation with the third boundary-value problem

XIN Kui-dong, CHEN Cai-sheng

(College of sciences, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract The existence of solutions to the non-local elliptic equation in $\Omega \subset R^n$ ($n \geq 3$) with the third boundary-value problem was studied. The Green function for the equation was constructed at first, and its cone was defined. Then the existence of the positive radial solution was verified by the fixed point theorem in a cone.

Key words non-local problem; cone preserving operator; Green function