

适线法估计 P-Ⅲ 分布设计年径流量的统计试验研究

陈元芳,赵利红,许 睢,马斌勋,王文鹏

(河海大学水文水资源学院,江苏 南京 210098)

摘要 在水资源评价中常要用适线法估计不同保证率下设计年径流量,目前对不同准则适线所得的设计值精度几乎没有进行理论分析,因此,至今还不太清楚所得成果的精度以及不同准则对结果产生的影响,同时,在适线过程中,存在着考虑部分点据还是采用所有点据进行适线的争论.为此,以参数和设计值的不偏性和有效性为评价标准,以 P-Ⅲ 分布为总体线型,通过统计试验计算对以上问题进行了研究,并得出了采用绝对值准则适线优于平方和准则的结论.当采用部分点据,特别是少于 20% 的点据进行适线,将导致结果较不稳定,精度较差,而考虑全部点据进行适线好于部分点据适线,其设计值比总体值略偏小,但仍可以接受.

关键词 适线法 适线准则 部分点据适线 不偏性 有效性 年径流 P-Ⅲ 分布

中图分类号 P338 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2007)02-0176-05

各种水利工程的规划设计都需要进行水文频率计算工作,以确定不同稀遇频率时(如 $p = 1\%$, 0.1% 等)暴雨或洪水的设计值.由于不同频率暴雨或洪水设计值计算精度的优劣直接影响到工程投资及安全,因此,国内外学者对其进行了大量的研究,取得了令人满意的结果^[1-5].目前我国水利水电工程设计洪水规范^[6]规定以 P-Ⅲ 型为年最大洪量或年降水量的总体线型,采用适线法(目估适线、优化适线)估计其参数.但在水资源评价中,常需要估计某些保证率(如 $p = 75\%$, 85% 或 95%)时的水文设计值,如设计年径流量等.对于这种情况下的参数估计一般认为可直接使用适线法,故到目前为止对于如何更好地估计设计值的精度几乎没有进行理论研究.

在实践中发现,应用适线法对设计年径流等进行估算时,存在以下几个问题:(a)利用适线法所估计出的设计值精度如何,不同适线准则怎样对设计值产生影响;(b)在适线过程中,到底应该考虑所有点据还是部分点据仍存在争议.目前生产单位在适线时一般仅考虑频率曲线最右部少数点据定线,而不管上部拟合如何,这种做法效果如何还没有定论.

鉴于此,本文以估计参数和设计值的不偏性和有效性为标准,以 P-Ⅲ 型作为总体分布线型,通过统计试验,研究不同适线方法所得参数与设计值精度的差异,解决目前设计年径流量等计算中存在的问题,为指导今后更好地进行参数估计提供参考.

1 分布线型

采用常见的 P-Ⅲ 型分布,其密度函数为

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (x - a_0)^{\alpha-1} e^{-\beta(x-a_0)} \quad (x \geq a_0) \quad (1)$$

式中 α, β, a_0 分别为 P-Ⅲ 型分布密度函数的参数, $\alpha > 0, \beta > 0$, 它们与总体的 3 个统计参数 EX, C_v, C_s 的关系如下:

$$\alpha = \frac{4}{C_s^2} \quad \beta = \frac{2}{EX C_v C_s} \quad a_0 = EX \left(1 - \frac{2C_v}{C_s} \right) \quad (2)$$

这样只要根据样本估计出参数 EX, C_v, C_s , 就可求出 α, β, a_0 , 从而计算出不同频率设计值.

2 不同适线方法

在我国,适线法是 P-Ⅲ 型分布中最常见的方法,文献[6]中规定一般使用目估适线法,但也可使用计算机优化适线法.适线时,绘点公式采用期望值公式.考虑到利用统计试验方法^[7-8]进行理论研究时难于考虑目估适线法,故本文研究了绝对值准则及平方和准则的适线法.

设所研究水文系列为简单样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 由大到小排列为 $x_m^* (m = 1, 2, \cdots, n)$. 绘点公式为

$$p_m = \frac{m}{n + 1} \quad (m = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

2.1 考虑所有点据的适线

a. 平方和准则 φ_1 . 目标函数

$$\Delta = \sum_{m=1}^n (x_m^* - x_{p_m}^0)^2 \tag{4}$$

b. 绝对值准则 φ_2 . 目标函数

$$\Delta = \sum_{m=1}^n |x_m^* - x_{p_m}^0| \tag{5}$$

式中 $x_{p_m}^0$ 为频率 p_m 的理论设计值.

在给定某种参数 EX, C_v, C_s 情况下,就有对应目标函数值 Δ . 最小 Δ 所对应的参数 EX', C'_v, C'_s 即为某种准则适线法所估计的参数值.

2.2 考虑部分点据的适线

以上是考虑所有点据进行优化适线. 当考虑部分点据适线时,即利用频率曲线最右部 $k\%$ ($k = 10, 20, 30, \cdots$) 的点据定线. 显然,当 $k = 100$ 时,即为考虑所有点据的适线. 目标函数改写成以下形式.

a. 平方和准则 φ_1 . 目标函数

$$\Delta = \sum_{m=n-nk+1}^n (x_m^* - x_{p_m}^0)^2 \tag{6}$$

如样本长度 $n = 50$, 比例为 $k = 20\%$, 则仅用样本由大到小排列后第 41 ~ 50 年数据计算目标函数,且等权重考虑.

b. 绝对值准则 φ_2 . 目标函数

$$\Delta = \sum_{m=n-nk+1}^n |x_m^* - x_{p_m}^0| \tag{7}$$

当所求某频率设计值出现负值时,则取其为 0.

3 评价标准

本文评价计算结果优劣的标准是估计参数和设计值的不偏性及有效性^[9].

对于估计参数的不偏性和有效性分别采用其 N_s 次统计试验的均值与均方误来表示,当均值与总体值很接近,则可认为是无偏估计,均方误越小说明方法有效性越好.

对于设计值的不偏性和有效性分别采用相对偏差的均值 B_{xp} 和相对根均方误 S_{xp} 表示

$$S_{xp} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_s} (\hat{x}_p^i - x_p^0)^2 / (N_s x_p^0)^2} \times 100\% \tag{8}$$

$$B_{xp} = \frac{\sum_{i=1}^{N_s} (\hat{x}_p^i - x_p^0)}{N_s x_p^0} \times 100\% \tag{9}$$

式中 p ——设计保证率; x_p^0 ——相应设计保证率 p 的总体设计值; $\hat{x}_p^i$ ——第 i 个试验样本相应设计保证率 p 的设计值估计值; N_s ——统计试验次数.

B_{xp} 为正值表示设计值偏大,为负值表示偏小; $|B_{xp}|$ 越大,设计值偏差越大. 一般情况下 $|B_{xp}|$ 不超过 5%, 可以认为无偏; S_{xp} 越小有效性越好.

4 试验方案设计

4.1 2种适线准则时的方案设计

实测序列长度 n 取 30,50,100,总体参数 $EX_0 = 1.0$, C_{v0} 取 0.3,0.5,1.0, C_{s0}/C_{v0} 取 2,3,分别采用考虑所有点据的绝对值准则和平方和准则进行适线,共计 36 个方案.

4.2 不同点据比例适线时的方案设计

实测序列长度 n 取 30,50,100,总体参数 $EX_0 = 1.0$, C_{v0} 取 0.3,0.5,1.0, C_{s0}/C_{v0} 取 2,3,4,而部分点据比例分别取 0.1,0.2,0.3,0.5,0.6,0.7,1.0,共计 189 个方案.仅考虑绝对值准则适线.

以上各种统计试验时,均取统计试验次数 $N_s = 2000$,设计保证率 p 分别取 0.50,0.75,0.85,0.95.

5 计算结果与分析

5.1 2种适线准则对估计结果的影响

部分计算方案结果见表 1.

表 1 2种适线准则下的参数、设计值的计算成果(部分方案)
Table 1 Partial results of parameters and design values obtained by curve-fitting method under two criteria

总体参数			适线 准则	EC_v	EC_s	SC_v	SC_s	B_{xp1}	B_{xp2}	B_{xp3}	B_{xp4}	S_{xp1}	S_{xp2}	S_{xp3}	S_{xp4}
n	C_v	C_s													
50	0.3	0.6	φ_1	0.32	0.66	0.04	0.43	-0.58	-1.34	-1.66	-2.06	4.98	5.75	6.40	9.73
50	0.3	0.6	φ_2	0.31	0.61	0.03	0.39	-0.18	-0.64	-0.93	-1.54	4.82	5.53	6.35	10.15
50	0.3	0.9	φ_1	0.32	0.99	0.04	0.47	-0.74	-1.36	-1.50	-1.43	5.03	5.23	5.36	7.63
50	0.3	0.9	φ_2	0.31	0.89	0.04	0.40	-0.04	-0.45	-0.74	-1.39	4.77	4.97	5.33	7.98
50	0.5	1.0	φ_1	0.53	1.11	0.07	0.49	-1.64	-3.05	-3.48	-3.58	8.90	10.68	11.92	21.33
50	0.5	1.0	φ_2	0.51	0.99	0.06	0.41	-0.27	-1.09	-1.76	-3.79	8.30	10.05	11.77	21.82
50	0.5	1.5	φ_1	0.54	1.67	0.10	0.64	-2.38	-2.86	-2.39	-1.28	9.19	8.64	8.30	13.49
50	0.5	1.5	φ_2	0.51	1.50	0.06	0.40	-0.27	-0.68	-0.91	-1.76	7.88	7.94	7.94	11.60
50	1.0	2.0	φ_1	1.12	2.28	0.24	0.85	-8.12	-11.40	-12.06	20.16	24.03	30.26	43.73	157.00
50	1.0	2.0	φ_2	1.03	2.03	0.13	0.43	-1.35	-1.90	-2.33	6.06	18.94	26.53	34.91	106.30
50	1.0	3.0	φ_1	1.17	3.40	0.36	1.24	-8.82	-9.07	-10.37	-13.25	21.68	15.03	17.60	23.36
50	1.0	3.0	φ_2	1.02	3.05	0.16	0.53	-0.87	-0.05	-0.65	-2.50	15.98	8.00	6.65	10.34

注: $p_1 = 50\%$, $p_2 = 75\%$, $p_3 = 85\%$, $p_4 = 95\%$, $EX_0 = 1.0$.

从参数的计算结果来看,2种准则情况下求得的参数 EC_v, EC_s 在多数情况下都比总体值略大,绝对值准则适线估计参数的无偏性及有效性比平方和准则适线要好,后者在总体参数 C_v, C_s 较大时,会出现严重偏大情况.就设计值而言,2种准则情况下适线所求得的设计值在多数情况下比总体值 x_p^0 要略小,采用绝对值准则适线在绝大多数方案下 $|B_{xp}|$ 小于 5%,可以认为无偏.但平方和准则适线则非如此,在总体参数值 C_v, C_s 比较大时,所估计设计值会严重偏小,但个别情况则严重偏大,故成果很不稳定.关于设计值的有效性,两者总体相当,但前者略好,比较稳定.

因此,从统计试验结果来看,采用绝对值准则计算效果要比采用平方和准则好.

5.2 不同点据比例对估计结果的影响

部分计算方案结果见表 2.

a. 总体上讲,适线时考虑点据比例对参数及设计值计算结果具有一定的影响.当点据比例高于 20% 时,其影响较小;当点据比例较小,如小于 20% 时,则影响较大.在总体参数 C_v, C_s 较大时,所得的设计值结果明显较差.

b. 点据比例在 20% 以上的部分点据和所有点据适线,除了总体参数 $C_v = 1, C_s = 2$ 方案外,其设计值不偏性大体上均可接受,因为 $|B_{xp}|$ 小于 5%,其中绝大多数小于 3%,应该说不偏性均较好;但在总体参数 $C_v = 1, C_s = 2$ 方案下,考虑部分点据适线的不偏性比考虑所有点据适线要差,因为部分点据在 $p = 95\%$ 时 $|B_{xp}|$ 均偏大约 10%,有时甚至达到 37%,说明在方案下考虑部分点据精度很差.部分点据适线所得设计值的有效性与全部点据适线时基本相当.当点据比例小于 20% 时,所得设计值结果比考虑所有点据适线要差,特别是

比例在 10% 时效果很差,部分方案设计值严重偏大. 总体上讲,考虑所有点据适线时结果较稳定,且精度较高.

表 2 不同点据比例时参数、设计值的计算成果(部分方案)

Table 2 Partial results of parameters and design value by curve-fitting method at different data proportions															
总体参数			点据 比例	EC_v	EC_s	SC_v	SC_s	B_{xp1}	B_{xp2}	B_{xp3}	B_{xp4}	S_{xp1}	S_{xp2}	S_{xp3}	S_{xp4}
n	C_v	C_s													
30	0.50	1.00	0.1	0.53	1.18	0.09	0.34	-2.31	-3.13	-2.54	1.47	10.05	13.4	15.94	23.11
30	0.50	1.00	0.2	0.52	1.00	0.08	0.52	-0.66	-1.56	-2.14	-3.94	10.62	13.49	15.51	24.97
30	0.50	1.00	0.3	0.52	0.97	0.08	0.53	-0.33	-1.00	-1.59	-3.79	10.60	13.21	15.17	25.46
30	0.50	1.00	0.5	0.51	0.96	0.07	0.53	-0.06	-0.57	-1.19	-3.81	10.55	12.72	14.78	26.94
30	0.50	1.00	0.6	0.51	0.94	0.07	0.52	0.17	-0.33	-1.07	-4.30	10.57	12.63	14.92	28.29
30	0.50	1.00	0.7	0.51	0.94	0.07	0.52	0.18	-0.27	-0.99	-4.13	10.54	12.58	15.04	28.92
30	0.50	1.00	1.0	0.52	0.99	0.08	0.54	-0.46	-1.62	-2.59	-5.80	10.75	13.02	15.33	28.56
30	1.00	2.00	0.1	1.02	2.08	0.17	0.39	-2.04	0.61	6.45	37.70	22.64	33.50	42.95	86.19
30	1.00	2.00	0.2	1.03	2.06	0.16	0.44	-1.90	-1.22	1.06	10.71	22.69	32.27	40.46	94.06
30	1.00	2.00	0.3	1.02	2.05	0.16	0.43	-1.31	-0.20	2.15	11.18	22.44	31.86	39.98	95.18
30	1.00	2.00	0.5	1.01	2.00	0.14	0.41	0.03	1.73	3.64	10.41	22.12	32.10	40.48	101.69
30	1.00	2.00	0.6	1.00	1.98	0.14	0.45	0.70	2.93	4.42	12.70	22.60	32.25	41.43	116.24
30	1.00	2.00	0.7	1.00	1.96	0.14	0.46	1.06	3.10	3.74	11.04	22.66	32.05	41.69	118.04
30	1.00	2.00	1.0	1.04	2.03	0.17	0.55	-1.81	-3.70	-6.64	2.91	23.89	33.10	44.10	121.57
50	0.50	1.50	0.1	0.50	1.43	0.09	0.43	0.53	0.90	0.76	-0.66	8.85	9.31	8.51	8.20
50	0.50	1.50	0.2	0.51	1.49	0.07	0.37	-0.10	-0.10	-0.09	-0.45	8.00	8.35	8.02	8.22
50	0.50	1.50	0.3	0.50	1.48	0.07	0.35	0.05	0.09	0.08	-0.34	7.78	8.08	7.80	8.34
50	0.50	1.50	0.5	0.50	1.48	0.06	0.35	0.16	0.22	0.18	-0.40	7.69	7.89	7.66	9.40
50	0.50	1.50	0.6	0.50	1.47	0.06	0.36	0.28	0.34	0.24	-0.58	7.72	7.83	7.68	10.13
50	0.50	1.50	0.7	0.50	1.46	0.06	0.37	0.34	0.39	0.24	-0.76	7.73	7.81	7.79	10.82
50	0.50	1.50	1.0	0.51	1.50	0.06	0.40	-0.27	-0.68	-0.91	-1.76	7.88	7.94	7.94	11.60
50	1.00	3.00	0.1	0.85	2.52	0.26	0.84	14.92	15.60	9.40	-0.77	26.70	22.62	13.14	1.68
50	1.00	3.00	0.2	0.97	2.94	0.17	0.49	2.77	3.15	1.79	-0.54	16.46	9.29	4.58	2.26
50	1.00	3.00	0.3	0.99	2.99	0.15	0.45	1.27	2.06	1.42	-0.05	15.05	7.97	4.21	2.57
50	1.00	3.00	0.5	0.98	2.97	0.13	0.38	1.45	1.94	1.32	-0.15	14.47	8.07	4.23	3.11
50	1.00	3.00	0.6	0.98	2.96	0.13	0.39	1.75	2.18	1.36	-0.43	14.87	8.22	4.39	4.56
50	1.00	3.00	0.7	0.98	2.94	0.13	0.39	2.14	2.26	1.18	-0.89	14.94	8.24	4.70	5.82
50	1.00	3.00	1.0	1.02	3.05	0.16	0.53	-0.87	-0.05	-0.65	-2.50	15.98	8.00	6.65	10.34
100	0.30	1.20	0.1	0.30	1.21	0.04	0.29	-0.20	-0.30	-0.29	-0.36	3.51	3.72	3.54	3.42
100	0.30	1.20	0.2	0.30	1.19	0.03	0.25	-0.02	-0.11	-0.14	-0.33	3.30	3.43	3.31	3.34
100	0.30	1.20	0.3	0.30	1.19	0.03	0.26	-0.05	-0.12	-0.13	-0.27	3.27	3.32	3.20	3.42
100	0.30	1.20	0.5	0.30	1.19	0.03	0.27	-0.02	-0.07	-0.07	-0.23	3.25	3.19	3.10	3.78
100	0.30	1.20	0.6	0.30	1.19	0.03	0.27	-0.01	-0.05	-0.06	-0.23	3.25	3.17	3.12	3.98
100	0.30	1.20	0.7	0.30	1.19	0.03	0.27	0.01	-0.04	-0.07	-0.27	3.23	3.16	3.16	4.14
100	0.30	1.20	1.0	0.30	1.21	0.03	0.28	-0.15	-0.31	-0.34	-0.47	3.31	3.22	3.19	4.29
100	1.00	4.00	0.1	0.84	3.38	0.27	1.02	13.73	5.35	1.87	-0.10	20.20	7.51	2.75	0.18
100	1.00	4.00	0.2	0.92	3.70	0.19	0.65	6.43	1.70	0.35	-0.13	10.66	2.24	0.45	0.19
100	1.00	4.00	0.3	0.98	3.95	0.16	0.50	1.83	0.54	0.06	-0.06	6.87	1.10	0.20	0.18
100	1.00	4.00	0.5	1.00	4.03	0.15	0.45	0.49	0.32	0.08	0.01	6.02	0.95	0.31	0.31
100	1.00	4.00	0.6	0.99	3.99	0.13	0.35	0.82	0.34	0.05	-0.03	6.00	0.97	0.31	0.39
100	1.00	4.00	0.7	0.98	3.97	0.14	0.39	1.14	0.35	-0.05	-0.18	6.61	0.98	0.68	0.94
100	1.00	4.00	1.0	1.01	4.07	0.16	0.53	-0.10	-0.22	-0.58	-0.71	6.94	1.50	2.09	2.44

6 结 论

- a. 对于平方和准则和绝对值准则 2 种适线来说,后者有更好的效果,精度更高且比较稳定,建议在不同保证率的设计年径流量中采用绝对值准则进行适线.
- b. 在利用适线法进行不同保证率设计年径流量时,选取的点据比例对估计结果有一定的影响. 当点据比例较大时,影响不太明显. 但是当点据比例较小,如小于 20% 时,所得设计值结果比考虑所有点据的适线

要差.取全部点据进行适线在所有方案下几乎可以认为无偏,这一点比部分点据进行适线要好.总体上讲,考虑所有点据适线时结果较稳定,且精度较高.考虑所有点据适线时,其设计值比总体值略有偏小,这与推求小频率下设计洪水结果略有偏大结论恰好相反.

c. 本研究成果不仅适合于不同保证率设计年径流量的计算,而且适合于设计年降水量的计算.

d. 实际上,年径流量或年降水量系列存在着自相关,有时还比较大,而目前水文频率计算方法只适用独立同分布样本,因此,系列自相关的存在对于设计值计算结果是否有影响,有多大影响,值得进一步分析.

参考文献：

[1] 丛树铮,谭维炎,黄守信,等.水文频率计算中参数估计方法的统计试验研究[J].水利学报,1980(3):1-9.
[2] 马秀峰.计算水文频率参数的权函数法[J].水文,1984(3):1-7.
[3] 宋德敦,丁晶.概率权重矩法及其在 P-Ⅲ 型分布中应用[J].水利学报,1988(3):1-11.
[4] 陈元芳,沙志贵,陈剑池,等.具有历史洪水时 P-Ⅲ 分布线性矩法研究[J].河海大学学报:自然科学版,2001,29(4):76-80.
[5] 熊立华,郭生练.L-矩在区域洪水频率分析中的应用[J].水力发电,2003,29(3):39-45.
[6] 水利部,能源部.SL44—93 水利水电工程设计洪水计算规范[S].北京:中国水利电力出版社,1993.
[7] 丁晶,邓育仁.随机水文学[M].成都:成都科技大学出版社,1998:54-63.
[8] 陈元芳.统计试验方法及应用[M].哈尔滨:黑龙江人民出版社,2000:45-50.
[9] 陈元芳,侯玉.P-Ⅲ 分布参数估计方法的研究[J].河海大学学报,1992,20(3):24-31.

Statistical experiment study of design annual runoff
satisfying P-III distribution estimated by curve-fitting method

CHEN Yuan-fang, ZHAO Li-hong, XU Sui, MA Bin-xun, WANG Wen-peng
(College of Water Resources and Environment, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract :The curve-fitting method is often used for estimating the design annual runoff under different guarantee ratios in water resources evaluation ; however, little theoretical analysis has been done about the precision of the design value under different curve-fitting criteria, therefore, the precision of the design value as well as the influence of different criteria have been unknown. Meanwhile, there still exists a dispute about whether all of the data or part of the data should be adopted for curve-fitting. In consideration of the above problems, Monte-Carlo experiments were performed with the P-III distribution adopted and the unbiasedness and effectiveness of parameters and design values taken as the criteria for evaluation. It is concluded that the curve-fitting method with the absolute value criterion is superior to that with the square summation criterion, and that the adoption of part of data, especially the proportion of data adopted being less than 20%, will lead to the instability and inaccuracy of the estimated result, while if all of the data are used for curve-fitting, the result is better and acceptable though the design values are slightly negatively-biased.

Key words :curve-fitting method ; criterion of curve-fitting ; partial data curve-fitting ; unbiasedness ; effectiveness ; annual runoff ; P-III distribution