

旅行商问题的一种启发式算法

洪玉振¹,张际东²,李 明¹

(1. 河海大学商学院,江苏 南京 210098;2. 河海大学外国语学院,江苏 南京 210098)

摘要 :用一个有向图表示旅行商避开某一城市到 1 个顶点的所有最短路径,并在每条弧上定义一个线性表,用以记录所有包含该弧的图,从而将判断某条弧和某个顶点是否应该存在于某个子图中的最短路径上的问题转化为线性表的相关操作,进而讨论了图上的弧都在某一最短路径上的充要条件,以及如何顺序产生第 1 列到第 n 列的顶点上的图,如何从这些图上搜索出近似最优解的方法.

关键词 旅行商问题 ;最短路径 ;有向图 ;启发式算法

中图分类号 :O224 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2007)02-0229-04

本文沿用文献[1]的符号和定义.在文献[1]的图 1 中,每个顶点 $v(p_k)$ 上用一个图来表示旅行商避开一个被访问城市 p_n 到它的所有最短路径.已知第 $k-1$ 列上的图,根据文献[1]提供的最短路径的必要条件,确定第 k 列上的图,重复这一步骤,求出第 n 列上的图.

显然,这涉及动态规划的思想. Bellman 等^[2-3]运用动态规划原理讨论了旅行商的路径优化问题. Clientsov 等^[4-6]研究了路径问题中的离散-连续优化方法的应用. Chentsov 等^[4,8]分析了动态规划应用于 TSP 路径优化的过程.以上提及的动态规划在 TSP 方面的应用基于 Bellman 的最优性原理,而本文探讨的 TSP 算法依据文献[1].

1 图和弧上的线性表

1.1 图 $G(v(p_k) \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g)$ 的定义

用图 $G(v(p_k) \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g)$ 来表示旅行商避开城市 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 到 $v(p_k)$ 的全部最短路径,定义它为 2 个符号集合 顶点的集合 $\Omega(v(p_k) \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g)$ 和弧的集合 $A(v(p_k) \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g)$,即

$$G(v(p_k) \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g) = (\Omega(v(p_k) \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g), A(v(p_k) \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g)) \tag{1}$$

同理,定义由经过指定顶点 $v(q_{k-1})$ 到 $v(p_k)$ 的全部最短路径的图:

$$G(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset r_1, \dots, r_g) = (\Omega(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset r_1, \dots, r_g), A(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset r_1, \dots, r_g)) \tag{2}$$

仅当 $v(p_{j-1})$ 和 $v(p_j)$ 是图 $G(v(p_k) \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g)$ 中同一路径上的 2 个相邻的顶点时,才存在一条从 $v(p_j)$ 到 $v(p_{j-1})$ 的弧 $[v(p_j), v(p_{j-1})]$, $v(p_j)$ 称之弧尾, $v(p_{j-1})$ 称之为弧头. 顶点 $v(p_k)$ 和 $v(0)$ 分别称之为图 $G(v(p_k) \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g)$ 的源点(Source)和终点(Destination). 用 $\eta(v(p_k) \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g)$ 表示 $G(v(p_k) \not\subset r_1, r_2, \dots, r_g)$ 的权,它等于到 $v(p_k)$ 的最短路径的权.

1.2 弧上的线性表

在 $G(v(p_k) \not\subset p_n)$ 上的每一弧上定义一个线性表,用以记录它所属的图,从而将判断某条弧和某个顶点是否应该存在于某个子图中的最短路径上的问题转化为线性表的相关操作.

在文献[1]的图 1 中,依次对第一行和第一列上的顶点到第 n 行和第 n 列上的顶点进行编号:1,2,..., n^2 . 这样,第 i 行和第 j 列上的顶点的编号为 $(j-1)n+i$. 为 $G(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 上的每一条弧 $[v(q_j), v(q_{j-1})]$ 建立一个线性表,记作 $L(v(q_j), v(q_{j-1}))$,线性表中数据元素为该弧所属子图源点的编号,按升序排列. 对于 $G(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 上顶点 $v(q_x)$,用 $\pi(q_x)$ 表示它的编号. 顶点的编号和顶点存在一一对应的关系,有时为表示方便,用编号 $\pi(q_x)$ 代表顶点 $v(q_x)$.

设 $G(v(q_i^{(\chi)} \not\subset p_n)$ 为 $G(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 上第 i 列上的第 χ 个包含弧 $[v(q_j), v(q_{j-1})]$ 的子图, $i \in [j, k -$

$l], \chi \in [1, a(i)], a(i) \in [1, n-2]$, 亦即 $[v(q_j), v(q_{j-1})] \in A(v(q_i^{(\chi)})) \not\subset p_n$, 则 $[v(q_j), v(q_{j-1})]$ 上的线性表为 $L(v(q_j), v(q_{j-1})) = (\pi(q_j^{(1)}), \pi(q_{j+1}^{(1)}), \dots, \pi(q_{j+1}^{(a(j+1))}), \dots, \pi(q_{k-2}^{(1)}), \dots, \pi(q_{k-2}^{(a(k-2))}), \pi(q_{k-1}^{(1)}))$, 这里, $\pi(q_j^{(1)}) = \pi(q_j), \pi(q_{k-1}^{(1)}) = \pi(q_{k-1})$. 令 $L_i(v(q_i), v(q_{i-1})) = \{\pi(q_i^{(1)}), \dots, \pi(q_i^{(a(i))})\}$, 则 $L(v(q_j), v(q_{j-1}))$ 可划分成以下子集:

$$L(v(q_j), v(q_{j-1})) = L_j(v(q_j), v(q_{j-1})) \cup L_{j+1}(v(q_j), v(q_{j-1})) \cup \dots \cup L_{k-1}(v(q_j), v(q_{j-1})) \quad (3)$$

注意到线性表中数据元素两两相异, 因此

$$L_j(v(q_j), v(q_{j-1})) \cup L_{j+1}(v(q_j), v(q_{j-1})) \cup \dots \cup L_{k-1}(v(q_j), v(q_{j-1})) = \emptyset \quad (4)$$

2 删除 $G(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 中第 p_k 行上的顶点和弧

定理 1 $G_R(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 上的任意一条弧 $[v(q_{j-1}), v(q_{j-2})]$ 在到 $v(q_{k-1})$ 的最短路径上的充分必要条件: 当 $j \in [2, k-1]$ 时,

$$L(v(q_j), v(q_{j-1})) \subset L(v(q_{j-1}), v(q_{j-2})) \quad (5)$$

$j \in [1, k-2]$ 时, 存在弧 $[v(q_{j+1}^{(1)}), v(q_j)], [v(q_{j+1}^{(2)}), v(q_j)], \dots, [v(q_{j+1}^{(a(j+1))}), v(q_j)]$, 且

$$L(v(q_j), v(q_{j-1})) = \{\pi(q_j)\} \cup L(v(q_{j+1}^{(1)}), v(q_j)) \cup L(v(q_{j+1}^{(2)}), v(q_j)) \cup \dots \cup L(v(q_{j+1}^{(a(j+1))}), v(q_j)) \quad (6)$$

这里, $a(j+1) \in [1, n-2]$.

证明:

a. 必要性. 假设 $G_R(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 上的每条弧都在最短路径上, 而 $[v(q_{k-1}), v(q_{k-2})]$ 为 $G_R(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 中的弧.

对于任一包含弧 $[v(q_j), v(q_{j-1})]$ 的最短路径 $< v(q_0), v(q_1), \dots, v(q_{k-1}) \not\subset p_n >, v(q_{j+1}), v(q_{j+2}), \dots, v(q_{k-1})$ 为包含 $[v(q_j), v(q_{j-1})]$ 和 $[v(q_{j-1}), v(q_{j-2})]$ 的图的源点, 但 $v(q_{j-1})$ 为包含 $[v(q_{j-1}), v(q_{j-2})]$ 而不包含 $[v(q_j), v(q_{j-1})]$ 的图的源点, 因此, 式(5)成立.

因为 $[v(q_j), v(q_{j-1})]$ 在到 $v(q_{k-1})$ 的最短路径上, $[v(q_j), v(q_{j-1})]$ 必须属于第 $k+1$ 列上的一个或数个图 $G_R(v(q_{j+1}^{(1)})) \not\subset p_n, G_R(v(q_{j+1}^{(2)})) \not\subset p_n, \dots, G_R(v(q_{j+1}^{(a(j+1))})) \not\subset p_n$, 因而弧 $[v(q_{j+1}^{(1)}), v(q_j)], [v(q_{j+1}^{(2)}), v(q_j)], \dots, [v(q_{j+1}^{(a(j+1))}), v(q_j)]$ 存在. 对于每一 $\mu \in [1, a(j+1)]$, 包含 $[v(q_{j+1}^{(\mu)}), v(q_j)]$ 的图也包含 $[v(q_j), v(q_{j-1})]$, 而 $[v(q_j), v(q_{j-1})]$ 在以 $v(q_j)$ 为源点的图上, 但 $[v(q_{j+1}^{(\mu)}), v(q_j)]$ 不在, 因此, 式(6)成立.

b. 充分性. 令 $[v(q_j), v(q_{j-1})]$ 为 $G_R(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 上的满足式(5)和式(6)的弧, 要证明存在最短路径 $< v(q_0), v(q_1), \dots, v(q_{k-1}) \not\subset p_n > . G_R(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 上所有弧都满足式(5), 因此存在弧 $[v(q_{j-1}), v(q_{j-2})], [v(q_{j-2}), v(q_{j-3})], \dots, [v(q_1), v(q_0)]$, 且

$$L(v(q_j), v(q_{j-1})) \subset L(v(q_{j-1}), v(q_{j-2})) \subset \dots \subset L(v(q_1), v(q_0)) \quad (7)$$

$G_R(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 上所有弧都满足式(6), 因此存在源点 $[v(q_{k-1}), v(q_{k-2})], [v(q_{k-2}), v(q_{k-3})], \dots, [v(q_{j+1}), v(q_j)]$, 且

$$L(v(q_{k-1}), v(q_{k-2})) \subset L(v(q_{k-2}), v(q_{k-3})) \subset \dots \subset L(v(q_j), v(q_{j-1})) \quad (8)$$

式(5)和式(6)产生最短路径 $< v(q_0), v(q_1), \dots, v(q_{k-1}) \not\subset p_n > .$

在 $G_R(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 中, 假设以 $v(q_j)$ 为弧头的弧为 $[v(q_{j+1}^{(\beta)}), v(q_j)], \beta \in [1, t]$ 以 $v(q_j)$ 为弧尾的弧为 $[v(q_j), v(q_{j-1}^{(\alpha)}), \alpha \in [1, s]$. 为每条以 $v(q_j)$ 为弧尾的弧 $[v(q_j), v(q_{j-1}^{(\alpha)})]$ 建立一个参照表并初始化: $L'(v(q_j), v(q_{j-1}^{(\alpha)})) = \emptyset, \alpha \in [1, s]$. 对于每一 $[v(q_{j+1}^{(\beta)}), v(q_j)]$, 检查是否存在弧 $[v(q_j), v(q_{j-1}^{(\alpha)})]$ 使 $L(v(q_{j+1}^{(\beta)}), v(q_j)) \subset L(v(q_j), v(q_{j-1}^{(\alpha)}))$. 若存在, 则将 $L(v(q_{j+1}^{(\beta)}), v(q_j))$ 并入相应的 $L'(v(q_j), v(q_{j-1}^{(\alpha)}))$; 若不存在, 则删除 $[v(q_{j+1}^{(\beta)}), v(q_j)]$. 每条以 $v(q_j)$ 为弧头的弧必须与所有以 $v(q_j)$ 为弧尾的弧进行比较, 以确定它是否并入后者对应的参照表. 完成比较后, 检查每一 $L'(v(q_j), v(q_{j-1}^{(\alpha)}))$ 是否仍为空集. 若为空集, 则删除 $[v(q_j), v(q_{j-1}^{(\alpha)})]$ 若不为空集, 则使 $L(v(q_j), v(q_{j-1}^{(\alpha)})) = L'(v(q_j), v(q_{j-1}^{(\alpha)}))$.

3 生成图 $G(v(p_{n-1}) \not\subset p_n)$

依次生成 $G(v(p_1) \not\subset p_n), G(v(p_2) \not\subset p_n), \dots, G(v(p_{n-1}) \not\subset p_n)$. 首先生成第一列上顶点的图 $G(v(p_1) \not\subset$

p_n). 当 $d(0, p_1) < +\infty$ 时, 对于每一 $p_n \in [1, n]$, 只要 $p_n \neq p_1$, 则 $\langle v(0), v(p_1) \not\subset p_n \rangle$ 为最短路径, 其权重 $w(0, p_1) = d(0, p_1)$. 在这种情况下, $\Omega(v(p_1) \not\subset p_n) = \{v(0), v(p_1)\}$; $A(v(p_1) \not\subset p_n) = \{v(p_1), v(0)\}$; $\eta(v(p_1) \not\subset p_n) = w(0, p_1)$; $L(v(p_1), v(0)) = (\pi(p_1))$.

若 $d(0, p_1) = +\infty$, 则 $\eta(v(p_1) \not\subset p_n) = +\infty$, 这时, $G(v(p_1) \not\subset p_n)$ 不存在. 当 $k \in [2, n-1]$ 时, 现给定第 $(k-1)$ 列上顶点的所有的图 $G(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$. 当 $p_k \neq q_{k-1}$ 且 $0 < d(q_{k-1}, p_k) < +\infty$ 时, 应用上一节提出的方法, 删除 $G(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 上第 p_k 行上的顶点以及由此导致的那些不在最短路径上的顶点和弧, 从而获得 $G(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 的一个子图 $G_R(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$. 如果 $v(q_{k-1})$ 在 $G(v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 上仍与 $v(0)$ 连通, 则 $G(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 生成如下:

$$\Omega(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset p_n) = \{v(p_k)\} \cup \Omega_R(v(q_{k-1}) \not\subset p_n) \quad (9)$$

$$A(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset p_n) = \{v(p_k), v(q_{k-1})\} \cup A_R(v(q_{k-1}) \not\subset p_n) \quad (10)$$

$$\eta(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset p_n) = \eta(v(q_{k-1}) \not\subset p_n) + d(q_{k-1}, p_k) \quad (11)$$

$$L(v(p_k), v(q_{k-1})) = (\pi(p_k)) \quad (12)$$

完成 $G(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 后, 初始化 $G(v(p_k) \not\subset p_n)$: $\Omega(v(p_k) \not\subset p_n) = \emptyset$, $A(v(p_k) \not\subset p_n) = \emptyset$. 置 $\eta(v(p_k) \not\subset p_n) = \min \{ \eta(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset p_n) / v(q_{k-1}) \in \Gamma_{k-1} \}$. 若 $\eta(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset p_n) = \eta(v(p_k) \not\subset p_n)$, 则将 $G(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 并入 $G(v(p_k) \not\subset p_n)$:

$$\Omega(v(p_k) \not\subset p_n) \cup \Omega(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset p_n) \Rightarrow \Omega(v(p_k) \not\subset p_n) \quad (13)$$

$$A(v(p_k) \not\subset p_n) \cup A(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset p_n) \Rightarrow A(v(p_k) \not\subset p_n) \quad (14)$$

对于每一 $[v(q_j), v(q_{j-1})] \in A(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$, 若它已存在于 $A(v(p_k) \not\subset p_n)$, 则将这 2 条相同的弧上的 2 个线性表的并集作为 $A(v(p_k) \not\subset p_n)$ 中该弧的线性表; 若它不存在于 $A(v(p_k) \not\subset p_n)$, 则 $[v(q_j), v(q_{j-1})]$ 在 $A(v(p_k)/v(q_{k-1}) \not\subset p_n)$ 中的线性表就是它在 $A(v(p_k) \not\subset p_n)$ 中的线性表. 当 $\eta(v(p_k) \not\subset p_n) = +\infty$ 时, $G(v(p_k) \not\subset p_n)$ 不存在. 重复以上步骤, 生成到第 $n-1$ 列上的图 $G(v(p_{n-1}) \not\subset p_n)$.

4 近似最优解搜索

4.1 生成 $G(v(p_n))$

用 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_n) \rangle$ 表示到第 n 列上顶点 $v(p_n)$ 的路径.

当 $w(p_0, p_1, \dots, p_n) = \min \{ w(q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, p_n) / \langle v(q_0), v(q_1), \dots, v(q_{n-1}) \not\subset p_n \rangle \in S_{n-1} \}$ 时, 定义 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_n) \rangle$ 为最短路径. 图 $G(v(q_n))$ 由到 $v(q_n)$ 的全部最短路径构成, 它定义为 2 个符号集合: 顶点的集合 $\Omega(v(q_n))$ 和弧的集合 $A(v(q_n))$, 亦即 $G(v(q_n)) = (\Omega(v(q_n)), A(v(q_n)))$.

用图 $G(v(q_n)/v(r_{n-1}))$ 表示经过 $v(r_{n-1})$ 到 $v(q_n)$ 的全部最短路径. 当 $d(r_{n-1}, q_n) < +\infty$ 时, 生成 $G(v(q_n)/v(r_{n-1}))$ 如下:

$$\Omega(v(q_n)/v(r_{n-1})) = \{v(q_n)\} \cup \Omega(v(r_{n-1}) \not\subset q_n) \quad (15)$$

$$A(v(q_n)/v(r_{n-1})) = \{v(q_n), v(r_{n-1})\} \cup A(v(r_{n-1}) \not\subset q_n) \quad (16)$$

$$\eta(v(q_n)/v(r_{n-1})) = \eta(v(r_{n-1}) \not\subset q_n) + d(r_{n-1}, q_n) \quad (17)$$

$$L(v(q_n), v(r_{n-1})) = (\pi(q_n)) \quad (18)$$

对于每一 $[v(r_j), v(r_{j-1})] \in A(v(q_n)/v(r_{n-1}))$, 在 $L(v(r_j), v(r_{j-1}))$ 中的最后一个元素后插入 $\pi(q_n)$. 置 $\eta(v(q_n)) = \min \{ \eta(v(q_n)/v(r_{n-1})) / v(r_{n-1}) \in \Gamma_{n-1} \}$. 如果 $\eta(v(q_n)/v(r_{n-1})) = \eta(v(q_n))$, 将 $G(v(q_n)/v(r_{n-1}))$ 并入 $G(v(q_n))$: $\Omega(v(q_n)/v(r_{n-1})) \cup \Omega(v(q_n)) \Rightarrow \Omega(v(q_n))$; $A(v(q_n)/v(r_{n-1})) \cup A(v(q_n)) \Rightarrow A(v(q_n))$, 同时将 $G(v(q_n)/v(r_{n-1}))$ 中的所有线性表并入 $G(v(q_n))$.

4.2 搜索最优解

如果在第 n 列至少存在一个顶点 $v(q_n)$, 满足 $\eta(v(q_n)) < +\infty$ 和 $d(q_n, 0) < +\infty$, 则旅行商访问的第 n 个城市取决于 $\eta(v(p_n)) = \min \{ \eta(v(q_n)) + d(q_n, 0) / v(q_n) \in \Gamma_n \}$.

定理 2 $G(v(p_n))$ 上存在最短路径 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_n) \rangle$ 的充分必要条件: 存在一个弧的系列 $[v(p_n), v(p_{n-1})], [v(p_{n-1}), v(p_{n-2})], \dots, [v(p_1), v(p_0)]$, 且

$$\pi(p_n) \in L_n(v(p_n), v(p_{n-1})) \quad (19)$$

$$\pi(p_{n-1}) \in L_{n-1}(v(p_{n-1}), v(p_{n-2})), \pi(p_n) \in L_n(v(p_{n-1}), v(p_{n-2})); \dots; \quad (20)$$

$$\pi(p_1) \in L_1(v(p_1), v(p_0)), \pi(p_2) \in L_2(v(p_1), v(p_0)), \dots, \pi(p_n) \in L_n(v(p_1), v(p_0)) \quad (21)$$

证明:

a. 必要性. 假设 $G(v(p_n))$ 上存在最短路径 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_n) \rangle$. $k = n$ 时, 弧 $[v(p_n), v(p_{n-1})]$ 存在, $L(v(p_n), v(p_{n-1})) = L_n(v(p_n), v(p_{n-1})) = (\pi(p_n))$, 因此 $\pi(p_n) \in L_n(v(p_n), v(p_{n-1}))$. 假设 $k = j$ 时, 存在 $[v(p_j), v(p_{j-1})]$, 且 $\pi(p_j) \in L_j(v(p_j), v(p_{j-1}))$, $\pi(p_{j+1}) \in L_{j+1}(v(p_j), v(p_{j-1}))$, $\dots$, $\pi(p_n) \in L_n(v(p_j), v(p_{j-1}))$.

当 $k = j - 1$ 时, 因为 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_n) \rangle$ 是最短路径, 因此弧 $[v(p_{j-1}), v(p_{j-2})]$ 存在, 且以 $v(p_{j-1}), v(p_j), \dots, v(p_{n-1})$ 为源点的图的子图 $G(v(p_{j-2}) \notin p_n)$ 存在, 亦即 $L(v(p_{j-1}), v(p_{j-2}))$ 满足: $\pi(p_{j-1}) \in L_{j-1}(v(p_{j-1}), v(p_{j-2}))$, $\pi(p_j) \in L_j(v(p_{j-1}), v(p_{j-2}))$, $\dots$, $\pi(p_n) \in L_n(v(p_{j-1}), v(p_{j-2}))$. 因此, $k = j - 1$ 时成立.

b. 充分性. $j \in [1, n]$, 弧 $[v(p_j), v(p_{j-1})]$ 存在, 且满足 $\pi(p_j) \in L_j(v(p_j), v(p_{j-1}))$, $\pi(p_{j+1}) \in L_{j+1}(v(p_j), v(p_{j-1}))$, $\dots$, $\pi(p_n) \in L_n(v(p_j), v(p_{j-1}))$. 对于任一 $j \in [1, n]$, $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_{j-1}) \rangle \notin p_j$, $p_{j+1}, \dots, p_n$ 是最短路径, $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_{n-1}) \rangle \notin p_n$ 是最短路径, 因此 $\langle v(p_0), v(p_1), \dots, v(p_n) \rangle$ 是最短路径.

顺着弧的指向, 按下列顺序搜索解: $[v(p_n), v(p_{n-1})] \rightarrow [v(p_{n-1}), v(p_{n-2})] \rightarrow \dots \rightarrow [v(p_1), v(p_0)]$.

5 结 语

被避开的城市 $p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n$ 有 C_n^k 种组合, 亦即第 k 列上图的总数最多达 C_n^k . 显然, 当城市数很大时要获得每一组合对应的图是困难的. 因此, 本文讨论图 $G(v(p_k) \notin p_n)$ 的数目. 每列上只有 n 个顶点, $p_n \in [1, n]$ 且 $p_n \neq p_k$, 因此, 每个顶点上最多有 $n - 1$ 个图, 每一列上最多有 $n \times (n - 1)$ 个图. 根据文献[1], 只需要获得图 $G(v(p_k) \notin p_n)$ 而不是图 $G(v(p_k) \notin p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n)$.

参考文献:

- [1] 洪玉振. TSP 最短路径的必要条件初探[J]. 河海大学学报: 自然科学版, 2006, 34(6): 717-720.
- [2] BELLMAN R. Dynamic programming treatment of the traveling salesman problem[J]. J Assoc Comput Mach, 1962, 9(1): 51-63.
- [3] HELD M, KARP R M. A dynamic programming approach to sequencing problems[J]. J Soc Industr and Appl Math, 1962, 10(1): 196-210.
- [4] CLIENTSOV A G, KOROTAYEVA L N, SESEKIN A N. On a modification of the method of dynamic programming in a successive approach problem[J]. Zh Vychisi Mat Fiz, 1989, 29(8): 1107-1113.
- [5] BUSLAYEVA L T, CHENTSOV A G. On the problem of the decomposition of the process of successive choice of variants[J]. Mat Modebrovarne, 1991, 3(4): 103-113.
- [6] CHENTSOV A G, KOROTAYEVA L N, NAZAROV E M. An assignment problem[J]. Comput Maths Math Phys, 1993, 33(4): 443-452.
- [7] REINELT G. TSPLIB-A traveling salesman problem library[J]. ORSA Journal of Computing, 1991, 3(4): 376-384.

A heuristic algorithm for traveling salesman problem

HONG Yu-zhen¹, ZHANG Ji-dong², LI Ming¹

(1. Business School of Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. College of International Languages and Culture, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: A vector graph, composed of vertices and arcs, was adopted to express all the shortest paths to a vertex avoiding a certain city, and a linear list associated with each arc was defined to track the graphs including the corresponding arc. Thus, the problem whether a vertex or an arc is on the shortest path of a graph was turned to a linear list operation. With the method, the sufficient and necessary condition for all arcs in a graph lying on the shortest path was deduced. By generation of graphs at vertices from the first column to the n th column, the optimal approximate solution was found. As a conclusion, there are at most $n - 1$ graphs at each vertex, and at most $n \times (n - 1)$ graphs for each column, therefore, not the graph $G(v(p_k) \notin p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n)$, but the graph $G(v(p_k) \notin p_n)$ is needed to be obtained.

Key words: traveling salesmen problem; shortest path; vector graph; heuristic algorithm