

相对因子宽度与可 S -因子分解矩阵

王海鹰

(河海大学理学院, 江苏 南京 210098)

摘要 设 S 是实数集 R 的一个非空子集, 如果存在 S 上的矩阵 B , 使得 $A = BB^T$, 则称 A 是可 S -因子分解的. 对于一个实对称矩阵 A , 如果存在一个最小正整数 k 以及实矩阵(长方形) V , 使得 $A = VV^T$, 且 V 的每一列至多只有 k 个非零元素, 则称 A 的因子宽度为 k . 利用可 S -因子分解矩阵的 S -秩以及因子宽度, 引入相对因子宽度的定义, 给出了一些可 $\{0, 1\}$ -因子分解矩阵的相对因子宽度与因子分解之间的关系, 最后利用 S -秩和相对因子宽度, 刻画了一类矩阵.

关键词 相对因子宽度; 可 S -因子分解; S -秩; 对角占优

中图分类号 O151 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2007)02-0233-05

若 A 是一个对称正定矩阵或对称半正定矩阵, 总存在 A 的分解 $A = BB^T$, 其中 B 可以是方阵也可能是列数多于行数的长方形矩阵. 在数值计算中常遇到对称正定或半正定矩阵的分解. 如, 对任意的对称正定矩阵 A 存在 Cholesky 分解:

$$A = LL^T$$

式中 L 为下三角矩阵. 而 Cholesky 分解可用于求线性方程组的解, 因此矩阵的该类分解得到了广泛研究^[1-4].

设 A 是一个实对称矩阵, 如果存在一个最小正整数 k 以及实长方形矩阵 V , 使得 $A = VV^T$, 且 V 的每一列至多只有 k 个非零元素, 则 k 称为 A 的因子宽度 (factor width), 记为 $FW(A) = k$ ^[2]. Boman 等^[2] 引入因子宽度的概念并对这种矩阵的因子宽度进行了深入研究, 证明了矩阵 A 的因子宽度为 2 的充要条件是 A 为一个对称 H^+ -矩阵, 同时给出了一些矩阵因子宽度的下界.

设 S 是实数集 R 的一个非空子集, 如果 $A = BB^T$, 其中 $B = [b_{ij}]$, $b_{ij} \in S$, 则称 A 是可 S -因子分解 (S -factorizable) 的. 在 A 的 S -因子分解中存在矩阵 B , 其列数最小, 则该最小列数称为矩阵 A 的 S -秩, 记为 $\text{rank}_S A$ ^[1]. 显然, 如果 $S \subseteq T \subseteq R$, 且 A 是可 S -因子分解的, 则 A 亦是可 T -因子分解的, 且 $\text{rank}_S A \geq \text{rank}_T A$. 特别地, 当令 $S = \{0, 1\}$ 时, 则可以讨论矩阵 A 何时可 $\{0, 1\}$ -因子分解. 文献^[2] 主要讨论了矩阵可 $\{0, 1\}$ -因子分解的条件, 对 2, 3 阶正矩阵以及某些 4 阶矩阵给出了可 $\{0, 1\}$ -因子分解的条件, 证明当 $A = A^T \in Z_+^{n \times n}$, 且对角占优时, 一定可 $\{0, 1\}$ -因子分解, 并有 $\text{rank}_{\{0, 1\}} A = \frac{3}{2} \text{tr} A - \frac{1}{2} \sigma$, 其中 $\text{tr} A$ 为 A 的迹, σ 为 A 所有元素之和^[1]. 对角占优矩阵、正矩阵、矩阵的非负因子等与矩阵因子分解有关的问题, 见文献^[5~10].

本文结合文献^[1] 给出的 S -秩及文献^[2] 给出的因子宽度引入相对因子宽度的概念, 对一些可 $\{0, 1\}$ -因子分解的矩阵 A 给出其相对因子宽度的下界, 对某些对称的对角占优矩阵讨论了相对因子宽度与因子宽度之间的关系, 并且利用相对因子宽度, S -秩刻画了一类实对称矩阵.

1 因子宽度与相对 S -因子宽度

定义 1 设 S 是实数集 R 的一个非空子集, A 是可 S -因子分解的实矩阵, 如果存在一个最小正整数 r , 使得在 A 的所有最小列数的 S -因子分解 $A = VV^T$ 中存在一个矩阵 V , 其每列所含的非零元素不超过 r , 则称 r 为 A 的相对 S -因子宽度, 记为 $RFw_S(A) = r$, 显然有 $FW(A) \leq RFw_S(A)$.

例 1 设 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, 则有

$$A = BB^T \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

不难看出 $\text{rank}_{\{0,1\}} A = 10, RFW_{\{0,1\}}(A) = 3$, 因此 $Fw(A) \leq 3$.

命题 1 设 A 是对称半正定可 $\{0,1\}$ -因子分解的矩阵, 则 $\lambda_{\max}(A) \leq (\text{rank}_{\{0,1\}} A) RFW_{\{0,1\}}(A)$, 其中 $\lambda_{\max}(A)$ 为 A 的最大特征值.

证明 设 $A = BB^T$ 是 A 的最小列数 $\{0,1\}$ -因子分解. 若 $\text{rank}_{\{0,1\}} A = m$, 设 $B = [v_1, v_2, \dots, v_m]$, 则

$$A = [v_1, v_2, \dots, v_m][v_1^T, v_2^T, \dots, v_m^T]^T = v_1 v_1^T + v_2 v_2^T + \dots + v_m v_m^T$$

显然 $v_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, m$ 因此 $v_i v_i^T$ 的非零特征值是 $\lambda_i = v_i^T v_i$, 又由于是 $\{0,1\}$ -因子分解, 故 λ_i 为 v_i 中非零

元素的个数, 这样 $\max_x \frac{x^T(v_i v_i^T)x}{x^T x} = \lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$, 于是

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(A) &= \max_x \frac{x^T A x}{x^T x} = \max_x \frac{x^T B B^T x}{x^T x} = \max_x \frac{\sum_{i=1}^m x^T v_i v_i^T x}{x^T x} \leq \\ &= \sum_{i=1}^m \max_x \frac{x^T v_i v_i^T x}{x^T x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \leq (\text{rank}_{\{0,1\}} A) RFW_{\{0,1\}}(A) \end{aligned}$$

例 1 中的 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$. 由命题 1 及例 1 的结果, 可以得到 $0 < \lambda_{\max}(A) \leq 30$.

推论 1 设 $A = A^T \in Z_+^{n \times n}$, 且 A 为对角占优的, 记 $\text{tr} A$ 为 A 的迹, σ 为 A 的所有元素之和, 则

$$\lambda_{\max}(A) \leq \left(\frac{3}{2} \text{tr} A - \frac{1}{2} \sigma \right) RFW_{\{0,1\}}(A)$$

证明 由文献[1]的定理 3.1 和命题 1 可得.

例 2 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $A = A^T \in Z_+^{3 \times 3}$, 并且对角占优, 不难得到

$$A = BB^T \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

则^[1] $\text{rank}_{\{0,1\}} A = \frac{3}{2} \text{tr} A - \frac{1}{2} \sigma = 6 \quad RFW_{\{0,1\}}(A) = 2$

而 A 的特征值分别是 5, 2, 2, 因此有 $\lambda_{\max}(A) = 5 \leq 6 \times 2 = 12$.

另一方面, 由文献[2]知一个对称半正定对角占优矩阵的因子宽度至多是 2, 而因子宽度为 1 的实对称半正定矩阵一定是对角矩阵, 由此可得 $Fw(A) = 2$, 所以 $Fw(A) = RFW_{\{0,1\}}(A) = 2$.

一般说来, 对一个实对称半正定可 $\{0,1\}$ -因子分解的矩阵 A , 有 $Fw(A) \leq RFW_{\{0,1\}}(A)$, 对于实对称半正定对角占优矩阵 $A = [a_{ij}]$, 可以得到如下结果. 为此, 设 $x = x_1 \cup x_2$, 则

$$x_1 = \{a_{ij} \mid i < j, a_{ij} \neq 0, 1 \leq i < j \leq n\} \quad x_2 = \{a_{ii} \mid a_{ii} - \sum_{j \neq i} a_{ij} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (1)$$

定理 1 设对称对角占优矩阵 $A = A^T \in Z_+^{n \times n}$, x 如式(1)定义, 如果 $\text{rank}_{R_+} A = |x|$, 其中 $|x|$ 表示 x 中元素的个数, 则 $Fw(A) = RFW_{R_+}(A)$.

证明 设 e_i 为第 i 个元素是 1、其他元素是 0 的列向量,则可以将 A 表成秩为 1 的矩阵之和,即

$$A = \sum_{i=1}^n \left(a_{ii} - \sum_{j \neq i} a_{ij} \right) e_i e_i^T + \sum_{i < j} a_{ij} (e_i + e_j) (e_i + e_j)^T \tag{2}$$

由于 A 是对角占优的,且 $A \in \mathbb{Z}_+^{n \times n}$,故上述表达式中每一个秩为 1 的矩阵前的系数非负.

令 $v_i = \sqrt{a_{ii} - \sum_{j \neq i} a_{ij}} e_i, i = 1, 2, \cdots, n, v_{ij} = \sqrt{a_{ij}} (e_i + e_j), 1 \leq i < j \leq n$, 取

$$\tilde{B} = [v_1, \cdots, v_n, v_{12}, \cdots, v_{1n}, v_{23}, \cdots, v_{2n}, \cdots, v_{n-1,n}]$$

如果 $\sqrt{a_{ii} - \sum_{j \neq i} a_{ij}} = 0$ 或者 $a_{ij} = 0, 1 \leq i < j \leq n$, 则将 v_i 或 v_{ij} 从 $\tilde{B}$ 中删去,这样得到的矩阵记为 B , 于是有 $A = BB^T$, 而 B 的列数等于 $|x|$. 故由上述构造的矩阵 B 是 A 的一个最小列数的 R_+ -因子分解, 假设知 $\text{rank}_{R_+} A = |x|$, 而当 A 是对角矩阵时 $RFw_{R_+}(A) = Fw(A) = 1$. 当 A 不是对角矩阵时, 至少有一个 $v_{ij} \neq 0$, 所以 $RFw_{R_+}(A) = Fw(A) = 2$.

例 3 设 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}, A = A^T \in \mathbb{Z}_+^{3 \times 3}$ 是对角占优的, 不难得到

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

故 $\text{rank}_{\mathbb{Z}_+} A = 3$. 另一方面可得 $RFw_{\mathbb{Z}_+}(A) = 3$. 由文献[2]知 $Fw(A) = 2$.

又因 $\frac{3}{2} \text{tr} A - \frac{1}{2} \sigma = 8$, 所以 $\text{rank}_{\{0,1\}} A = 8$. 于是有

$$A = BB^T \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因此 $RFw_{\{0,1\}}(A) = 2$.

例 3 说明, 存在矩阵 A , 使得 $Fw(A) < RFw_S(A)$. 此外若 $S_1 \subset S$, 但不一定有 $RFw_S(A) \leq RFw_{S_1}(A)$. 因此相对因子宽度与因子宽度既有联系但又是两个不同的概念.

2 相对因子宽度对矩阵的刻画

引理 1 设 $A = A^T \in \mathbb{Z}_+^{n \times n}, A = [a_{ij}], a_{ii} \leq n, a_{ij} \neq 0, i, j = 1, 2, \cdots, n$, 如果 $\text{rank}_{\{0,1\}} A = \frac{n(n+1)}{2}$, $RFw_{\{0,1\}}(A) = 2$, 则 $a_{ii} = n, i = 1, 2, \cdots, n$.

证明 因为 $\text{rank}_{\{0,1\}} A = \frac{n(n+1)}{2}, RFw_{\{0,1\}}(A) = 2$, 故 A 有一个最小列数为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的 $\{0,1\}$ -因子分解 $A = BB^T$, 且 B 的每一列的非零元素至多是 2 个.

设 $B = [b_{ij}]$, 则 $a_{ij} = [b_{i1}, \cdots, b_{im}, \cdots, b_i^{\frac{n(n+1)}{2}}] [b_{j1}, \cdots, b_{jm}, \cdots, b_j^{\frac{n(n+1)}{2}}]^T$, 又因为 $a_{ij} \neq 0$, 故不难得到在 $[b_{i1}, \cdots, b_{im}, \cdots, b_i^{\frac{n(n+1)}{2}}] (i = 1, 2, \cdots, n)$ 中至少应有 $n-1$ 个非零元素, 因此 $a_{ii} \geq n-1 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 下面证明 $a_{ii} = n (i = 1, 2, \cdots, n)$.

事实上, 如果有某 $a_{ii} = n-1$, 不妨设 $a_{11} = n-1$, 并且设 B 的第一行的前 $n-1$ 个元素都为 1, 则后面的元素一定全为 0, 否则可以通过交换 B 的列向量得到. 由于 $a_{ij} \neq 0$, 因此 B 的第二行的元素中至少有一个非零元素在前 $n-1$ 个元素中出现. 由于 $a_{22} \leq n$, 故在 B 的第二行后面的 $\frac{n(n+1)}{2} - (n-1)$ 个元素中至多只有 $n-1$ 个非零元素. 不妨设该 $n-1$ 个非零元素在第 n 个元素至第 $n-1+(n-1)$ 个元素中出现, 否则通过交换 B 的列向量得到. 相同的讨论可知, B 的第 3 行中至少有 2 个非零元素出现在前 $2n-2$ 个元素中, 又因为 $a_{33} \leq n$, 故可以知道第 3 行至多只有 $n-2$ 个非零元素出现在第 $2n-1$ 个元素至第 $n-1+(n-1)+(n-2)$ 个元素中. 如此讨论下去, B 的第 n 行中至少有 $n-1$ 个非零元素出现在前 $n-1+(n-1)+(n-2)+\cdots+$

$(n - (n - 1) + 1) = \frac{n(n+1)}{2} - 2$ 个元素中, 而 $a_{nn} \leq n$, 故后面至多只有一个非零元素. 这样一来, B 的最后两列中只有一列可能在第 n 行有非零元素, 而另一列的所有元素全是零, 这与已知 $\text{rank}_{\{0,1\}} A = \frac{n(n+1)}{2}$ 的假设矛盾, 因此 $a_{ii} = n (i = 1, 2, \dots, n)$.

定理 2 设 $A = A^T \in \mathbb{Z}_+^{n \times n}$, $A = [a_{ij}]$, $a_{ii} \leq n$, $a_{ij} \neq 0, i, j = 1, 2, \dots, n$,

$$\text{则 } \text{rank}_{\{0,1\}} A = \frac{n(n+1)}{2} \quad Rfw_{\{0,1\}}(A) = 2 \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

证明 “ $\Rightarrow$ ” 因为 $\text{rank}_{\{0,1\}} A = \frac{n(n+1)}{2}$, 且 $Rfw_{\{0,1\}}(A) = 2$, 故 A 存在一个最小列数为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的 $\{0,1\}$ -因子分解 $A = BB^T$, 且 $B = [b_{ij}]$, 其每列的非零元素不超过 2 个. 又因为 $a_{ii} \leq n, i = 1, 2, \dots, n$, 由引理 1 可得 $a_{ii} = n (i = 1, 2, \dots, n)$, 因此 B 的每一行中元素为 1 的个数恰为 n . 下面证明当 $i \neq j$ 时 $a_{ij} = 1, i, j = 1, 2, \dots, n$. 事实上, 如果存在某个 $a_{ij} \neq 1, i \neq j$, 不妨设 $a_{12} \neq 1$, 总可以假设 $[b_{11}, \dots, b_{1n}, \dots, b_{1\frac{n(n+1)}{2}}]$ 的前 n 个元素不为零, 否则总可以通过交换 B 的列向量得到. 由于 $a_{12} \neq 1$, 因此 B 的第 2 行的前 n 个元素中至少有 2 个元素不为零, 又因为 $Rfw_{\{0,1\}}(A) = 2, a_{ij} \neq 0$, 故在 B 的第 2 行中后面的 $\frac{n(n+1)}{2} - n$ 个元素中非零元素至多有 $n - 2$ 个. 不妨设这些元素在 $[b_{2(n+1)}, \dots, b_{2(2n-2)}]$ 之中出现, 否则可以通过交换 B 的列向量而达到目的. 同理由于 $a_{ij} \neq 0, B$ 的第 3 行中至少有 2 个非零元素出现在前 $2n - 2$ 个元素中, 故在后 $\frac{n(n+1)}{2} - (2n - 2)$ 个元素中至多只有 $n - 2$ 个元素非零, 不妨设这些非零元素出现在 $[b_{3(2n-1)}, \dots, b_{3(3n-4)}]$ 之中. 如此讨论下去, 可得 B 的第 n 行元素中至少有 $n - 1$ 个非零元素在前 $\frac{n(n+1)}{2} - 2$ 个元素中出现, 而在 B 的最后 2 列中至多只有 1 列可能含有元素非零, 这与 $\text{rank}_{\{0,1\}} A = \frac{n(n+1)}{2}$ 的假设矛盾. 因此 $a_{ij} = 1, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$. 所以

$$A = \begin{bmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

$$\text{“} \Leftarrow \text{” 设 } A = \begin{bmatrix} n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n \end{bmatrix}, A \text{ 为 } n \text{ 阶对称矩阵. 由于 } \frac{3}{2} \text{tr} A - \frac{1}{2} \sigma = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ 由文献 [1] 知}$$

$$\text{rank}_{\{0,1\}} A = \frac{n(n+1)}{2}$$

再由定理 1 的证明, 令 $v_i = e_i, i = 1, 2, \dots, n; v_{ij} = e_i + e_j, 1 \leq i < j \leq n$, 作出矩阵

$$B = [v_1, \dots, v_n, v_{12}, \dots, v_{1n}, \dots, v_{n-1,n}]$$

则 $A = BB^T$ 是 A 的一个最小列数的 $\{0,1\}$ -因子分解, 此时有 $Rfw_{\{0,1\}}(A) = Fw(A) = 2$. 得证.

参考文献:

- [1] BERMAN A, XU C Q. $\{0,1\}$ Completely positive matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2005, 399: 35-51.
- [2] BOMAN E G, CHEN D, PAREKH O, et al. On factor width and symmetric H -matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2005, 405: 239-248.
- [3] BERMAN A, PLEMMONS R J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [4] HILL R, WATERS S. On the cone of positive semidefinite matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1987, 90: 81-88.
- [5] BARKER G, CARLSON D. Cones of diagonally dominant matrices[J]. Pacific J Math, 1975, 57: 15-32.
- [6] AXELSSON O. Iterative solution methods[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [7] VARGA R S. On recurring theorems on diagonal dominance[J]. Linear Algebra Appl, 1976, 13: 1-9.

[8] DREW J H,JOHNSON C R,LOEWY R. Completely positive matrices associated with M -matrices[J] . Linear and Multilinear Algebra, 1994,37 303-310.
[9] KAYKOBAD M. On nonnegative factorization of matrices[J] . Linear Algebra Appl,1987,96 27-33.
[10] PLESKEN W. Solving $XX^tr = A$ over the integers[J] . Linear Algebra Appl,1995,227 389-392.

Relative factor width and S -factorizable matrices

WANG Hai-ying

(College of Sciences , Hohai University , Nanjing 210098, China)

Abstract ¶Let S be a non-void subset of a set of real numbers $\mathbf{R}$. A is called S -factorizable if it can be factorized as $A = BB^T$ with $b_{ij} \in S$. For a real symmetric matrix A , if there exists a minimum positive integer k and a real rectangular matrix V with $A = VV^T$, and there are at most k non-zero elements in each column, the factor width of A is k . By use of S -rank and factor width of the S -factorizable matrix A , the concept of relative factor width was introduced, and the relationship between the relative factor width and factorization of some $\{0,1\}$ -factorizable matrices was given. Finally, some matrices were characterized with S -rank and relative factor width.

Key words ¶relative factor width ; S -factorizable ; S -rank ; diagonally dominant

+++++

《河海大学学报(哲学社会科学版)》征订启事

(CN32 – 1521/C, ISSN1671 – 4970, 季刊, 自办发行)

《河海大学学报(哲学社会科学版)》以马列主义、毛泽东思想、邓小平理论和‘三个代表’重要思想为指导,坚持实事求是的思想路线,贯彻‘双百’方针,弘扬时代主旋律,理论联系实际,为社会主义物质文明与精神文明建设服务。

《河海大学学报(哲学社会科学版)》为哲学与社会科学类学术期刊,主要刊登哲学、政治学、文学、语言学、法学、社会学、心理学、经济学、管理学、高等教育学等社会科学方面的研究成果、学术论文、综述等学术性文章。本刊可供上述有关专业的研究人员、管理人员和大专院校师生阅读与参考。《河海大学学报(哲学社会科学版)》为中国学术期刊(光盘版)入编期刊与中国学术期刊网入编期刊。

《河海大学学报(哲学社会科学版)》由河海大学主办,每季末出版,国内外公开发行。2007 年每本定价 5 元,每本邮费 1 元,全年订费 24 元。欢迎广大读者直接向编辑部订阅。联系地址 南京市西康路 1 号《河海大学学报(哲学社会科学版)》编辑部,邮政编码 210098。联系电话 025-83786376。