

R(L)型诱导空间的分离性

陆志军¹ 尤 飞²

(1. 河海大学理学院, 江苏 南京 210098 ; 2. 榆林学院计算机与网络工程系, 陕西 榆林 719000)

摘要 : 在 Hutton-Reilly 分离意义下对 $R(L)$ 型诱导空间分离性质进行了研究. 研究表明 : $T_i (i \leqslant 3)$ 分离性是 $R(L)$ 好的推广, 即 (L^X, δ) 是 T_i 空间当且仅当其 $R(L)$ 型诱导空间 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 也是 T_i 空间.

关键词 : $R(L)$ 型诱导空间 ; Hutton-Reilly 分离性 ; $T_i (i \leqslant 3)$ 空间

中图分类号 : O153.1 **文献标识码** : A **文章编号** : 1000-1980(2007)02-0238-03

在一般拓扑学中, 很多深刻的结果都是就具有某种分离性的拓扑空间得出的^[1]. 对于 F 拓扑空间而言, 情形更是如此, 仅文献 [1] 就给出了 3 套分离性公理. $R(L)$ 型诱导空间概念首先在文献 [2] 中由 Kubiak 引入, 并在文献 [3] 和 [4] 中对这一空间进行了较为深入的研究. 王戈平^[5-7] 独立引入了 $R(L)$ 半连续映射及 $R(L)$ 诱导空间概念, 并研究了 $R(L)$ 型诱导空间在 Hutton-Reilly 分离之下的分离性质, 得到了很好的结果. 本文将这一结果进一步推广为 $R(L)$ 型诱导空间.

1 预 备

设 L 为 F 格, R 为实直线, 考虑满足下面条件的映射 $\lambda : R \rightarrow L, \forall s, t \in R, s \leqslant t \Rightarrow \lambda(s) \geqslant \lambda(t)$. 以 $\sum$ 记这种映射全体. $\forall \lambda \in \sum, t \in R$, 规定 : $\lambda(t +) = \bigvee \{ \lambda(s) \mid s > t \}, \lambda(t -) = \bigwedge \{ \lambda(s) \mid s < t \}$. 对 $\sum$ 中任意二映射 λ 与 μ , 规定 : $\lambda \sim \mu$ 当且仅当 $\forall t \in R, \lambda(t +) = \mu(t +), \lambda(t -) = \mu(t -)$. 从而 $\sim$ 为 $\sum$ 中等价关系, 令 $R(L) = \sum / \sim$.

引理 1^[8] 对 $R(L)$ 中任二元 $[\lambda], [\mu]$, 规定 $[\lambda] \leqslant [\mu]$ 当且仅当 $\forall t \in R, \lambda(t -) \leqslant \mu(t -), \lambda(t +) \leqslant \mu(t +)$, 则 $R(L)$ 为一偏序集.

引理 2^[8] 对 $(R(L), \leqslant)$ 及 $(\sum, \leqslant)$, 下式成立 :

$$\bigvee_{a \in \Gamma} [\lambda_a] = [\bigvee_{a \in \Gamma} \lambda_a] \qquad \bigwedge_{a \in \Gamma} [\lambda_a] = [\bigwedge_{a \in \Gamma} \lambda_a]$$

任取 $\lambda \in R(L)$, 规定 $\lambda' : R \rightarrow L$ 为 $\forall t \in R, \lambda'(t) = \lambda(- t)$, 则 $R(L)$ 以如上定义的序及逆合对应“ $'$ ”是 F 格.

定义 1^[8] 设 $t \in R$, 定义映射 $\sigma_t, \omega_t : R(L)^X \rightarrow L^X$ 如下 :

$$\begin{aligned} \forall \mu \in R(L)^X \qquad \sigma_t(\mu) &= R_t \circ \mu \\ \omega_t(\mu) &= L'_t \circ \mu \end{aligned}$$

定义 2 设 (L^X, δ) 为 LF 拓扑空间, 映射 $\mu : X \rightarrow R(L)$ 称为 $R(L)$ 值下半连续, 如果 $\forall t \in R$, 有 $\sigma_t(\mu) \in \delta$.

定义 3 设 (L^X, δ) 为 LF 拓扑空间, X 上所有 $R(L)$ 值下半连续函数构成 X 上 $R(L)$ -fuzzy 拓扑, 记为 $\omega(\delta)$. $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 称为 (L^X, δ) 的 $R(L)$ 型诱导空间.

定义 4^[8] 定义映射 $*$: $L^X \rightarrow R(L)^X$ 如下 : $\forall r \in L^X, r * (x)(t +) = r(x)$.

定理 1^[8] 对任意 $u \in R(L)^X, r \in L^X, t \in R$, 有 (a) $\sigma_t(r *) = r (\sigma_t) \omega_t(r *) = r$.

定理 2^[8] 设 (L^X, δ) 是 LF 拓扑空间, $\mu \in R(L)^X, r \in L^X$, 则

- a. μ 是 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 中的开集当且仅当对任意 $t \in R, \sigma_t(\mu)$ 是 (L^X, δ) 中的开集 ;
- b. μ 是 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 中的闭集当且仅当对任意 $t \in R, \omega_t(\mu)$ 是 (L^X, δ) 中的闭集 ;

- c. r 是 (L^X, δ) 中的开集当且仅当 r^* 是 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 中开集;
 d. r 是 (L^X, δ) 中的开集当且仅当 r^* 是 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 中闭集.

2 $R(L)$ 型诱导空间的分离性

定义 5^[9] 设 (L^X, δ) 是一个 LF 拓扑空间, 则

- a. (L^X, δ) 是 T_0 空间当且仅当 $\forall A \in L^X, A = \bigvee_{j \in J, k \in K_j} U_{jk}$, 其中 U_{jk} 是开或闭集;
 b. (L^X, δ) 是 R_0 空间当且仅当 $\forall A \in L^X, A = \bigvee_{j \in J} U_j$, 其中 U_j 是闭集;
 c. (L^X, δ) 是 T_1 空间当且仅当 (L^X, δ) 是 R_0 和 T_0 ;
 d. (L^X, δ) 是 R_1 空间当且仅当 $\forall U \in \delta$, 有 $U = \bigvee_{j \in J, k \in K_j} U_{jk} = \bigvee_{j \in J, k \in K_j} \bar{U}_{jk}$, 其中 U_{jk} 是开集;
 e. (L^X, δ) 是 T_2 当且仅当 (L^X, δ) 既是 R_1 又是 T_0 ;
 f. (L^X, δ) 是正则当且仅当 $\forall U \in \delta$, 有 $U = \bigvee_{j \in J} U_j$, 其中 U_j 是开集且 $\bar{U}_j \subset U$;
 g. (L^X, δ) 是 T_3 当且仅当 (L^X, δ) 是正则且是 T_0 的.

以下几个引理的证明都是直接的, 故略去, 也可参考文献 [6] 的相关证明.

引理 3 设 $\{u_j\}_{j \in J} \subset R(L)^X, t \in R$, 则,

$$\sigma(\bigvee_{j \in J} u_j) = \bigvee_{j \in J} \sigma(u_j) \quad \omega(\bigwedge_{j \in J} u_j) = \bigwedge_{j \in J} \omega(u_j)$$

特别地, 若 J 是一个有限集, 则

$$\sigma(\bigvee_{j \in J} u_j) = \bigvee_{j \in J} \sigma(u_j) \quad \omega(\bigwedge_{j \in J} u_j) = \bigwedge_{j \in J} \omega(u_j)$$

引理 4^[8] 设 $u \in R(L^X)$, 则 $u = \bigvee_{t \in R} (\hat{t} \wedge (\sigma_t(u))^*)$.

引理 5^[8] 设 $u \in L^X, u \in R(L)^X$, 则下列公式成立:

$$\begin{aligned} \omega_s(u) &= \bigwedge_{t < s} \sigma_t(u) & \sigma_s(u) &= \bigwedge_{t > s} \omega_t(u) \\ \sigma_s(\hat{t} \wedge v^*) &= \begin{cases} v & (s < t) \\ 0 & (s \geq t) \end{cases} & \omega_s(\hat{t} \wedge v^*) &= \begin{cases} v & (s \leq t) \\ 0 & (s > t) \end{cases} \end{aligned}$$

引理 6 设 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是诱导的 $R(L)$ 型空间, $u \in R(L)^X, u \in L^X, t \in R$, 则下列公式成立:

$$\begin{aligned} \sigma_t(u^0) &\leq \sigma_t(u)^0 & \omega_t(\bar{u}) &\geq \overline{\omega_t(u)} \\ (\hat{t} \wedge v^*)^0 &= \hat{t} \wedge v^{0*} & \overline{\hat{t} \wedge v^*} &= \hat{t} \wedge \bar{v}^* \end{aligned}$$

3 主要定理

定理 3 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是 T_0 空间当且仅当 (L^X, δ) 是 T_0 空间.

证明: 设 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是 T_0 空间, $u \in L^X$, 则 $u^* \in R(L)^X$, 从而 $u^* = \bigvee_{j \in J, k \in K_j} v_{jk}$, 其中 v_{jk} 在 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 中开或闭. $\forall t \in R$. 由引理 3 可知

$$u = \sigma_t(u^*) = \bigvee_{j \in J} \sigma_t(\bigwedge_{k \in K_j} v_{jk}) \leq \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} \sigma_t v_{jk} \leq \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} \omega_t v_{jk} = \bigvee_{j \in J} \omega_t(\bigwedge_{k \in K_j} v_{jk}) \leq \omega_t(u^*) = u$$

记 $U(\bigvee_{j \in J} v_{jk}) = \begin{cases} \sigma_t(v_{jk}) & \text{若 } v_{jk} \text{ 开} \\ \omega_t(v_{jk}) & \text{若 } v_{jk} \text{ 闭} \end{cases}$, 则 $U(\bigvee_{j \in J} v_{jk})$ 在 (L^X, δ) 中开或闭. 容易证明 $u = \bigvee_{j \in J, k \in K_j} U(\bigvee_{j \in J} v_{jk})$.

所以 (L^X, δ) 是 T_0 空间. 相反的, 设 (L^X, δ) 是 T_0 空间, $u \in R(L)^X$, 则 $\sigma_t(u) \in L^X, \forall t \in R, \sigma_t(u) = \bigvee_{j \in J, k \in K_j} v_{jk}^t$, 其中 v_{jk}^t 开或闭在 (L^X, δ) 中, 所以 $\sigma_t(u)^* = \bigvee_{j \in J, k \in K_j} (v_{jk}^t)^*$. 根据引理 4 可知 $u = \bigvee_{t \in R} (\hat{t} \wedge \sigma_t(u)^*) = \bigvee_{t \in R} \bigvee_{j \in J, k \in K_j} (\hat{t} \wedge (v_{jk}^t)^*)$, 明显地, $\hat{t} \wedge (v_{jk}^t)^*$ 开或闭在 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 中, 故 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是 T_0 空间.

定理 4 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是 R_0 空间当且仅当 (L^X, δ) 是 R_0 空间.

证明: 设 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是 R_0 空间. $u \in \delta$, 则 $u^* \in \omega(\delta)$. 于是 $u^* = \bigvee_{j \in J} \xi_j$, 其中 ξ_j 闭在 $(R(L)^X, \omega(\delta))$, $\forall t \in R, u = \omega_t(u^*) \geq \bigvee_{j \in J} \omega_t(\xi_j) \geq \bigvee_{j \in J} \sigma_t(\xi_j) = \sigma_t(\bigvee_{j \in J} \xi_j) = \sigma_t(u^*) = u$. 所以 $u = \bigvee_{j \in J} \omega_t(\xi_j)$, 其中 $\omega_t(\xi_j)$ 闭在 (L^X, δ) .

充分性的证明类似定理3,故略去.

推论1 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是 T_1 空间当且仅当 (L^X, δ) 是 T_1 空间.

定理5 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是 R_1 空间当且仅当 (L^X, δ) 是 R_1 空间.

证明 设 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是 R_1 空间, $u \in \delta$, 则 $u^* \in \omega(\delta)$. 于是 $u^* = \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} v_{jk}$, 其中 $v_{jk} \in \omega(\delta)$. 任取

$t \in R$, 根据引理3和引理5

$$u \leq \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} \sigma_k(v_{jk}) \leq \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} \overline{\sigma_k(v_{jk})} \leq \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} \overline{\omega(v_{jk})} \leq \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} \omega(\overline{v_{jk}}) \leq \omega(\bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} \overline{v_{jk}}) = u$$

所以 $u = \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} \sigma_k(v_{jk}) = \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} \overline{\sigma_k(v_{jk})}$ 其中 $\sigma_k(v_{ij}) \in \delta$. 这就证明 (L^X, δ) 是 T_1 空间. 反之, 设 (L^X, δ) 是 R_1 空间, $u \in \omega(\delta)$, 则 $\forall t \in R, \sigma_t(u) \in \delta$. 此时 $\sigma_t(u) = \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} v_{jk}^t = \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} \overline{v_{jk}^t}$. 其中 $v_{jk}^t \in \delta$. 根据引理3有

$$u = \bigvee_{t \in R} (\hat{t} \wedge \sigma_t(u)^*) = \bigvee_{t \in R} \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} (\hat{t} \wedge (v_{jk}^t)^*) = \bigvee_{t \in R} \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} (\hat{t} \wedge \overline{v_{jk}^t}^*)$$

其中 $\hat{t} \wedge (v_{jk}^t)^* \in \omega(\delta)$ 且根据引理5, $\overline{\hat{t} \wedge v_{jk}^t} = \hat{t} \wedge \overline{v_{jk}^t}^*$. 这就说明 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是 R_1 空间.

推论2 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是 T_2 空间当且仅当 (L^X, δ) 是 T_2 空间.

定理6 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是正则空间当且仅当 (L^X, δ) 是正则空间.

证明 设 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是一个正则空间. 设 $u \in \delta$, 则 $u^* \in \omega(\delta)$.

因为 $u^* = \bigvee_{j \in J} v_j$ 其中 $v_j \in \omega(\delta)$ 且 $\overline{v_j} \leq u^*$. $\forall t \in R, u = \sigma_t(u^*) = \bigvee_{j \in J} \sigma_t(v_j)$, 其中 $\sigma_t(v_j) \in \delta$ 且 $\overline{\sigma_t(v_j)} \leq \overline{\omega(v_j)} \leq \omega(\overline{v_j}) \leq \omega(u^*) = u$, 故 (L^X, δ) 是一个正则空间.

相反的, 设 (L^X, δ) 是一个正则空间, $u \in \omega(\delta)$, 则 $\forall t \in R, \sigma_t(u) \in \delta, \sigma_t(u) = \bigvee_{j \in J} v_j^t$, 其中 $v_j^t \in \delta$ 且 $\overline{v_j^t} \leq \sigma_t(u)$. 由引理3和引理5, 有 $u = \bigvee_{t \in R} (\hat{t} \wedge \sigma_t(u)^*) = \bigvee_{t \in R} \bigvee_{j \in J} (\hat{t} \wedge v_j^{t*})$ 其中 $\hat{t} \wedge v_j^{t*} \in \omega(\delta)$ 且 $\overline{\hat{t} \wedge v_j^{t*}} = \hat{t} \wedge \overline{v_j^t}^* \leq \hat{t} \wedge \sigma_t(u)^* \leq u$, 故 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是一个正则空间.

推论3 $(R(L)^X, \omega(\delta))$ 是 T_3 空间当且仅当 (L^X, δ) 是 T_3 空间.

参考文献:

- [1] 王国俊. L -Fuzzy 拓扑空间论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988: 182-243.
- [2] KUBIAK T. A class of second order fuzzy set[C]//Proceedings of the 10th National School for Scientists. Appl of Math in Techn. Varna: [s. n.], 1984: 98-101.
- [3] KOTZE W, KUBIAK T. Inserting L -fuzzy real-valued functions[J]. Math Nachr, 1993, 164: 5-11.
- [4] KUBIAK T. Extending continuous L -real functions[J]. Math Japan, 1986, 31: 875-887.
- [5] WANG Ge-ping. $K(L)$ value semi-continuous mappings and new kind of induced mappings[J]. J Math, 1990, 10(3): 277-284.
- [6] WANG Ge-ping. Induced $K(L)$ -fuzzy topological spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 43(1): 69-80.
- [7] WANG Ge-ping. Separation properties of induced $K(L)$ -topological spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 140: 471-478.
- [8] 刘智彬. $R(L)$ 型诱导空间及其连通性[J]. 数学杂志, 2005, 29(6): 645-649.
- [9] HUTTON B, REILLY I. Separation axioms in fuzzy topological spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1980(3): 98-104.

Separation properties of induced $R(L)$ -topological spaces

LU Zhi-jun¹, YOU Fei²

(1. College of Sciences, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. Department of Computer and Network Engineering, Yulin College, Yulin 719000, China)

Abstract The separation properties in the sense of Hutton-Reilly of induced $R(L)$ -topological spaces were investigated. The results show that T_i ($i \leq 3$) separation properties are good $R(L)$ -extension, i. e. (L^X, δ) is T_i spaces if and only if induced $R(L)$ -topological space $(R(L)^X, \omega(\delta))$ is T_i spaces correspondingly.

Key words induced $R(L)$ -topological space; Hutton-Reilly separation property; T_i ($i \leq 3$) space