

基于 12σ 理论双侧控制图的控制界限研究

丰景春

(河海大学商学院,江苏 南京 210098)

摘要 根据基于 12σ 理论的双侧控制图原理,推导出基于 12σ 理论的双侧控制图控制界限的计算公式,并给出基于 12σ 理论控制图的算例.计算结果表明,在技术条件、技术水平相同的条件下,采用基于 12σ 理论的控制图进行质量控制,可提高产品质量、降低成本,从而提高企业的经济效益,增强企业的竞争力.

关键词 质量控制; 12σ 理论; 双侧限制; 控制界限; 控制图

中图分类号 F406.3 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2007)03-0352-04

目前,普遍将休哈特创立的 6σ 理论作为质量控制的依据,据此推导出质量控制界限与质量控制标准和工序质量检验标准等.按照 6σ 理论进行质量控制,既能节省质量控制费用,又能满足产品合格率的要求,较好地解决了质量与成本之间的矛盾,从而使 6σ 理论得到了广泛的应用.但是,从 20 世纪 90 年代末以来,日本、美国等发达国家的一些知名企业开始研究并应用 12σ 理论,研究与应用结果表明,该理论的应用在企业提高产品质量、降低成本、增加效益等方面发挥了重要作用.

在 6σ 控制理论中,产品不合格品率为 0.27%,即在每 100 万件产品中,可能出现 2700 件不合格品.但在 12σ 理论中,在每 100 万件产品中,可能出现 0.002 件不合格品,意味着在每 10 亿件产品中,只可能出现 2 件不合格品.可见,采用 12σ 理论进行质量控制,可以为企业带来巨大的经济效益和社会效益^[1-3].

目前,在各类质量控制图的设计中,仍然普遍采用基于 6σ 理论的质量控制图进行质量控制.为提高企业质量控制水平和产品质量,降低成本,从而增强企业竞争能力,本文研究并提出了基于 12σ 理论的质量控制标准,设计相应的双侧质量控制图,并给出质量控制界限.

1 基于 12σ 理论的双侧控制图原理

当生产过程仅受偶然性因素影响时,产品质量波动呈现出一定规律,即产品样本平均值服从或近似服从正态分布,在这种情况下,生产过程处于控制状态^[4-5];当生产过程既受偶然性因素影响,同时又受系统性因素影响时,其样本平均值不服从正态分布,即此时生产过程处于非控制状态,分布中心上移和下移都属异常.双侧控制图是目前应用较为广泛的质量控制图^[6-8],它主要适用于质量特性具有上下双侧限制要求的情况,例如轴承直径、轴线偏差等.

按照质量特性的属性,控制图可以分为计量型控制图和计数型控制图.不同种类的控制图有其自身的控制标准和控制界限.为了研究需要,结合较为常用的平均值-极差控制图,研究基于 12σ 理论的双侧控制图的控制界限.

2 双侧控制图控制界限的确定

双侧控制图用于判断生产过程的正常性,分析引起生产过程异常的原因,采取相应措施消除异常原因,从而达到控制生产过程质量的目的.为此,对于双侧控制图,需要确定上控制界限(UCL)、中心线(CL)和下控制界限(LCL).

在确定基于 12σ 理论双侧控制图的控制界限时,将正常性判断概率 $P\{LCL \leq \bar{x} \leq UCL\}$ 保持 99.998%,

保持与基于 6σ 理论双侧控制图在经济性方面一致^[9-10]。

2.1 基于 12σ 理论的双侧控制图控制标准

根据判断概率 $P\{LCL \leq \bar{x} \leq UCL\} = 99.998\%$ 得到：

$$P\{LCL \leq \bar{x} \leq UCL\} = \int_{LCL}^{UCL} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 99.998\%$$

(1)

式中： σ ——标准偏差； μ —— x 的期望值。

由式 (1) 可得到控制标准：

$$F = 6\sigma$$

(2)

a. 确定随机变量 $\bar{x}$ 的标准偏差。根据数理统计与概率论，基于 12σ 理论双侧控制图的控制界限为

$$\begin{aligned} CL &= E(\bar{x}) \\ UCL &= E(\bar{x}) + F \\ LCL &= E(\bar{x}) - F \end{aligned}$$

(3)

式中 $E(\bar{x})$ 为随机变量 $\bar{x}$ 的期望值，

$$E(\bar{x}) = \bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}}{k} \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{D(\bar{x})}$$

(4)

其中 k 为分组数。将式 (2) (4) 代入式 (3)，得

$$\begin{aligned} CL &= \bar{\bar{x}} \\ UCL &= \bar{\bar{x}} + 6\sqrt{D(\bar{x})} \\ LCL &= \bar{\bar{x}} - 6\sqrt{D(\bar{x})} \end{aligned}$$

(5)

由概率论和数理统计理论可知：

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{D(\bar{x})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(6)

b. 将 σ 转化为 $\bar{R}$ 。由于总体标准偏差 σ 未知，但其极差为已知值，因此需要将 σ 转化为 $\bar{R}$ 。可以通过样本的极差反映和确定总体标准偏差的变化^[11-12]。当 $n = 4$ 时，有下式成立：

$$f_{R4}(x) = \frac{12}{\pi^{\frac{2}{3}}} e^{-\frac{x^2}{4}} \left[\frac{\pi}{2} - \int_{-\arctan \frac{x}{2}}^{\arctan \frac{x}{2}} e^{-\frac{1}{12}x^2 \sec^2 \theta} d\theta \right]$$

(7)

可见，当 $n = 4$ 时， $f_{R4}(x)$ 已非常接近正态分布。根据休哈特正态分布试验结果，当 $n \geq 4$ 时，随机变量 R 近似服从正态分布，因此 $\bar{R}$ 可以按照正态分布处理，如图 1 所示。

R 分布的平均值：

$$\bar{R} = d_2 \sigma$$

(8)

其中

$$d_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - (1 - \alpha_1)^n - \alpha_1^n] dx_1$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

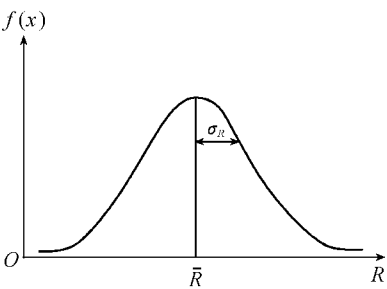


图 1 随机变量 R 的分布

Fig.1 Distribution of random variable R

式中 d_2 为 n 的函数，当样本容量 n 一定时，可以求出对应的 d_2 。 n 值与 d_2 值之间的对应关系见表 1。

表 1 n 与 d_2 的对应值

Table 1 Corresponding values of n and d_2

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_2	1.128	1.693	2.059	2.326	2.534	2.704	2.847	2.970	3.028	3.173

由式 (6) 和式 (8) 可以得出：

$$\sqrt{D(\bar{x})} = \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$$

(9)

2.2 $\bar{x}$ 控制图控制界限

将式(11)代入式(5)中,得到:

$$CL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}}$$
$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + 6 \frac{1}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R}$$
$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - 6 \frac{1}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R}$$

(10)

令 $A_2 = \frac{6}{d_2 \sqrt{n}}$, 则控制图中心线和控制上限、控制下限可写为

$$CL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}}$$
$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R}$$
$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R}$$

(11)

其中 A_2 为 n 和 d_2 的函数,表2为 A_2 值与 n 和 d_2 的关系.

表2 A_2 值与 n 和 d_2 的关系

Table 2 Relationship between A_2 and n together with d_2

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_2	1.128	1.693	2.059	2.326	2.534	2.704	2.847	2.970	3.028	3.173
A_2	3.761	2.046	1.457	1.154	0.967	0.839	0.745	0.673	0.627	0.570

3 算 例

某产品 20 个样本的质量特性强度见表 3. 下面分别采用 6σ 理论和 12σ 理论设计控制图,计算控制界限.

表3 某质量特性强度

Table 3 Strength for a quality characteristic of a product

MPa

序号	样本 x_i					样本 平均值 $\bar{x}$	样本 极差 R	序号	样本 x_i					样本 平均值 $\bar{x}$	样本 极差 R
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	31.7	29.6	30.5	29.4	30.5	30.36	2.3	11	29.1	29.0	28.7	27.6	28.3	28.54	1.5
2	28.5	28.9	28.3	29.9	28.0	28.72	1.9	12	28.1	28.4	27.8	28.1	28.3	28.14	0.6
3	28.9	27.9	28.1	28.3	28.9	28.42	1.0	13	28.0	28.2	27.8	27.8	28.2	28.00	0.4
4	28.3	27.8	27.5	28.4	27.9	27.98	0.9	14	28.3	29.1	28.5	27.7	29.3	28.58	1.6
5	28.8	27.1	27.1	27.9	28.0	27.78	1.6	15	28.8	28.3	27.8	28.1	28.4	28.28	1.0
6	28.5	28.6	28.3	28.9	28.8	28.62	0.6	16	28.9	28.1	27.3	27.5	28.4	28.04	1.6
7	27.8	28.4	27.7	28.3	27.9	28.02	0.7	17	28.4	29.0	28.9	28.3	28.6	28.64	0.7
8	28.9	27.9	27.8	28.6	28.4	28.32	1.0	18	27.7	28.7	27.7	29.9	29.4	28.50	1.7
9	28.5	29.2	29.0	29.1	28.0	28.76	1.2	19	28.4	27.2	28.8	27.6	28.0	28.00	1.6
10	28.5	28.9	27.7	27.9	27.7	28.14	1.2	20	27.0	28.8	28.1	29.4	27.9	28.64	1.5

a. 基于 6σ 理论的 $\bar{x}$ 控制图控制界限的计算结果为

$$\bar{\bar{x}} = 28.42 \text{ MPa}$$
$$\bar{R} = 1.23 \text{ MPa}$$

$$CL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} = 28.42 \text{ MPa}$$
$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} = 28.42 + 0.58 \times 1.23 = 29.13 \text{ (MPa)}$$
$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} = 28.42 - 0.58 \times 1.23 = 27.71 \text{ (MPa)}$$

b. 基于 12σ 理论的 $\bar{x}$ 控制图控制界限的计算结果为

$$CL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} = 28.42 \text{ MPa}$$
$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R} = 28.42 + 1.154 \times 1.23 = 29.83 \text{ (MPa)}$$
$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R} = 28.42 - 1.154 \times 1.23 = 27.00 \text{ (MPa)}$$

由以上计算结果可见 ,与基于 6σ 理论的控制界限相比 ,基于 12σ 理论的控制界限扩大了 101.42% ,落在基于 12σ 理论控制界限之外的概率仅为落在基于 6σ 理论控制界限之外概率的 1/135.

4 结 论

在生产条件和技术水平等相同的条件下 ,采用 12σ 理论控进行质量控制较采用 6σ 理论控进行质量控制具有更好的质量控制效果.

- a. 扩大了控制界限范围.算例的计算结果表明 ,对于平均值 – 极差控制图 ,基于 12σ 理论的控制界限与基于 6σ 理论的控制界限相比 ,中线没有发生变化 ,上、下控制界限均扩大 0.70 MPa ,扩大比例为 101.42% .
- b. 提高了产品合格率.在基于 6σ 理论的控制图中 ,要求落在 LCL , UCL 控制界限内的概率为 99.73% ,落在控制界限之外的概率不超过 0.27% ;而在基于 12σ 理论的控制图中 ,要求落在 LCL , UCL 控制界限内的概率为 99.998% ,落在控制界限之外的概率不超过 0.002% .两者相比 ,后者落在控制界限之外的概率仅为前者的 0.74% .

尽管基于 12σ 理论的控制图比基于 6σ 理论的控制图控制范围扩大了 101.42% ,即扩大 1 倍多 ,但在基于 12σ 理论的控制图中 ,要求落在控制界限外的概率仅为基于 6σ 理论控制图的 0.74% ,即 1/135.可见 ,在平均值相同的情况下采用基于 12σ 理论控制图进行质量控制时 ,生产过程控制更为严格 ,产品合格率更高.

参考文献 :

[1] 李强.发动机生产加工中质量控制界限的优化[J].火箭推进 ,2005(2) 25-28.
[2] 程灏 ,李晶蕾.工业工程导论[M].北京 :化学工业出版社 ,2004 :278-282.
[3] 张黎.统计过程监测与调整[J].控制与决策 ,2005(8) 3-9.
[4] 李成显.过程能力与计数值过程能力指数计算[J].国防技术基础 ,2005(7) :13-14.
[5] 战菊青 ,王振文.测量过程统计控制[J].工业计量 ,2004(5) 4-6.
[6] 夏远强 ,韩文秀 ,何民. GARCH 型相关过程及其质量控制图[J].天津大学学报 :自然科学与工程技术版 ,2003 ,36(1) :94-97.
[7] 张维铭 ,刘建斌.非参数质量控制图——中位值图[J].数学的实践与认识 ,2005(2) 75-81.
[8] 耿修林.多元质量控制在 SM 生产过程中的应用[J].统计与决策 ,2006(6) :18-24.
[9] 张从文.质量控制中统计界限幅度分析[J].经济师 ,2006(6) 28-32.
[10] 侯汉林.正态性单值控制图在工序控制中的应用[J].中国质量 ,2004(10) 21-30.
[11] 丰景春 ,杨侃.控制图判定标准的研究[J].河海大学学报 ,1996 ,24(2) :104-109.
[12] 丰景春 ,杨侃.单侧限制管理图控制界限的探讨[J].河海大学学报 ,1996 ,24(1) 97-103.

Research on control limit of double-side-restricted management chart based on 12σ theory

FENG Jing-chun
(Business School , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract :The calculation formula for control limit of double-side-restricted management chart based on 12σ theory was derived , and a calculation example was given . According to the result of calculation , the adoption of 12σ theory-based control chart can improve the quality of products and reduce the cost , and thus , it can improve the economic benefit and enhance the competitive capacity of enterprises .

Key words :quality control ; 12σ theory ; double-side-restriction ; control limit ; control chart