

关于非线性方程条件数的注记

刘玉霞,周继东

(河海大学理学院,江苏 南京 210098)

摘要 对于一般的非线性方程组的条件数,先根据矩阵范数的连续性给出了闭凸集上范数的有界性结论,再由范数的有界性和函数的 G -可微性得出了其界的估计结果.对于方程组系数是方阵的情形,由范数有界性给出了一般性结论.

关键词 非线性方程组 条件数 界的估计

中图分类号 O151.1 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2007)03-0356-03

方程组的条件数对于判别方程组解的稳定性是极其重要的.对于线性方程组的情形已经有了比较完美的结果,而对于非线性方程组的情形,至今未有系统的研究.文献[1]讨论了矩阵条件数达极小的条件,文献[2]讨论了范数的可逆方阵条件数达极小的性质,文献[3]讨论了长方形矩阵在 p ($p \neq 2, 1 \leq p \leq \infty$) 范数意义下达极小的一系列性质,文献[4]讨论了矩阵谱条件数的估计,文献[5]介绍了线性方程组系数矩阵条件数,并对方程解的稳定性进行了刻画.本文在线性的基础上进一步讨论了非线性方程组的条件数,并对其界进行了估计.

1 概念和引理

引理 1^[5] 设 $Ax = b$ 为 R^n 上的线性方程组, $Bx = c$ 为其扰动方程,其中 $A \in L(R^n)$ 为非奇异矩阵, $x \in R^n, b \in R^n, c \in R^n, B \in L(R^n)$ 且满足 $\|A^{-1}\| \|B - A\| < 1$, 由矩阵摄动引理知 B 是非奇异的, 且对 $b \neq 0$, 解 $x^* = A^{-1}b, y^* = B^{-1}c$ 满足以下估计:

$$\frac{\|x^* - y^*\|}{\|x^*\|} \leq \frac{K(A)}{1 - K(A) \frac{\|B - A\|}{\|A\|}} \left[\frac{\|B - A\|}{\|A\|} + \frac{\|b - c\|}{\|b\|} \right] \quad (1)$$

其中 $K(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$ 为 A 在某种范数下的条件数.

概念 设 $X = R^n, Y = R^m$, 对任意映射 $F: D \subset X \rightarrow Y$, 闭子集 $C \subset D$, 定义 F 的条件数 $K(F, C)$ 如下:

$$K(F, C) = \begin{cases} \nu(F, C) / \mu(F, C) & \text{若 } 0 < \mu(F, C), \nu(F, C) < \infty \\ \infty & \text{其余情形} \end{cases}$$

其中, $\mu(F, C) = \sup \{t \in [0, \infty) ; \|Fx - Fy\| \geq t \|x - y\|, \forall x, y \in C\}$; $\nu(F, C) = \inf \{t \in [0, \infty] ; \|Fx - Fy\| \leq t \|x - y\|, \forall x, y \in C\}$.

设非线性方程为

$$Fx = b \quad (2)$$

其扰动方程为

$$Gx = c \quad (3)$$

其中 $F: X \rightarrow Y, G: X \rightarrow Y$, F 与 G 在下列意义下充分接近. 在某个集合 C 上 F 和 G 的差 E 满足 $Ex = Fx - Gx, E: C \subset X \rightarrow Y$, 且对任意 $x \in C$, E 有充分小的 Lipschitz 范数.

在以上假设下,文献[6]给出如下结论:

引理 2 设 $F: D_F \subset X \rightarrow Y, G: D_G \subset X \rightarrow Y$ 给定, C 为 $D_F \cap D_G$ 的闭子集, 在 C 上有 $K(F, C) < \infty$, 且 $\nu(E, C) < \mu(F, C)$, 若方程(2), (3)分别有解 x^*, y^* , 则它们在 C 中唯一且对 $\forall x^0 \in C, x^0 \neq x^*$ 有估计式:

$$\frac{\|x^* - y^*\|}{\|x^* - x^0\|} \leqslant \frac{K(F, C)}{1 - K(F, C) \frac{\nu(E, C)}{\nu(F, C)}} \left(\frac{\|b - c\|}{\|b - Fx^0\|} + \frac{\nu(E, C)}{\nu(F, C)} + \frac{\|Ex^0\|}{\|b - Fx^0\|} \right) \quad (4)$$

引理3^[7] 设 $f:D \subset R^n \rightarrow R^1$ 在闭凸集 $C \subset D$ 的每一点都是 G -可微的,那么对任何两点 $x, y \in C$,存在 $t \in (0, 1)$,使得 $f(y) - f(x) = f'(x + t(y - x))(y - x)$.

引理 4^[8] 设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是线性赋范空间 X 中的一个线性无关组,则对任意选定的一组标量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 必存在一个正常数 C ,使得

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geqslant C(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|)$$

2 主要结论

定理 1 假设 F 的分量函数为 $f_1, \cdots, f_m, F$ 在闭凸集 $C \subset D$ 的每一点 G -可导,则存在 $t_1, \cdots, t_m \in (0, 1)$,使得对任意 $x, y \in C, Fy - Fx = B(x, y)(y - x)$ 成立,其中

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} f'_1(x + t_1(y - x)) \\ \vdots \\ f'_m(x + t_m(y - x)) \end{bmatrix}$$

证明 对于 F 的每个分量函数分别运用引理 3 的结论即可得证.

定理 2 设 F 在闭凸集 $C \subset D$ 中每一点 G -可微,且 $F'(x)$ 在 C 上连续,则对任意矩阵范数 $\|\cdot\|$, $\|B(x, y)\|$ 有界.

证明 由于 $F'(x)$ 在 C 上连续,则 f'_i 在 C 上连续,事实上,设 F' 在任意一点 $x^0 \in C$ 连续,即对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0, x \in C$,有 $\|F'(x) - F'(x^0)\| < \varepsilon$,由范数等价性知,不妨取 $\|F'(x) - F'(x^0)\|_1 < \varepsilon$,即

$$\left\| \begin{bmatrix} \partial_1[f_1(x) - f_1(x^0)] \cdots \partial_n[f_1(x) - f_1(x^0)] \\ \vdots \\ \partial_1[f_m(x) - f_m(x^0)] \cdots \partial_n[f_m(x) - f_m(x^0)] \end{bmatrix} \right\|_1 < \varepsilon$$

也即 $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^m |\partial_i[f_j(x) - f_j(x^0)]| < \varepsilon$,所以 $\max_{i,j} |\partial_i[f_j(x) - f_j(x^0)]| < \varepsilon$.故对任意的 i, j 有 $|\partial_i[f_j(x) - f_j(x^0)]| < \varepsilon$,所以 $\partial_i f_j(x)$ 在 x^0 处连续,所以 f'_i 在 x^0 处连续,由于 x^0 的任意性, f'_i 在 C 上连续,由 f'_i 在闭凸集 C 上连续可知 f'_i 在 C 上有界,从而 $F'(x)$ 在 C 上有界,所以存在 $m, M, 0 \leqslant m \leqslant M < \infty$,使得 $m \leqslant \|B(x, y)\| \leqslant M$. 证毕.

定理 3 对于方程(2)和(3),若 F, G 为 G -可微的,则存在正常数 P 使得 $K(F, C) \leqslant P$.

证明 对于方程(2)和(3),若 F, G 为 G -可微的,则由定理 1 可知:

$$\begin{aligned} \|Fy - Fx\| &= \|B(x, y)(y - x)\| \\ \frac{\|Fy - Fx\|}{\|y - x\|} &= \frac{\|B(x, y)(y - x)\|}{\|y - x\|} \leqslant M \end{aligned}$$

对于 $x, y \in R^n, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$,由引理 4 可知存在正常数 C 使得

$$\begin{aligned} \|B(x, y)(y - x)\| &= \left\| (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{bmatrix} \right\| \geqslant C(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + \cdots + |y_n - x_n|) = \\ &C \|y - x\|_1 \end{aligned}$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 为 $B(x, y)$ 的 n 个列向量.

再由范数的等价性可知存在正常数 N ,使得对任意的 $\|\cdot\|$ 有: $\|B(x, y)(y - x)\| \geqslant N \|y - x\|$,所以

$$N \leqslant \frac{\|Fy - Fx\|}{\|y - x\|} = \frac{\|B(x, y)(y - x)\|}{\|y - x\|}$$

所以由上面的讨论可知:

$$N \leq \frac{\|Fy - Fx\|}{\|y - x\|} = \frac{\|B(x, y)(y - x)\|}{\|y - x\|} \leq M$$

所以有

$$M \geq \nu(F, C) \quad N \leq \mu(F, C)$$

所以据 $F'(x)$ 的连续性及范数的连续性可知 $K(F, C) \leq \frac{M}{N}$, 取 $P = \frac{M}{N}$, 证毕.

对于 $m = n$, 且 $B(x, y)$ 可逆时有以下进一步的结论:

推论 设 $B(x, y)$ 的逆为 $B^{-1}(x, y)$, 则存在正数 L 和 H , 使得 $\frac{1}{L} \leq \frac{\|B(x, y)(y - x)\|}{\|y - x\|} \leq H$.

证明 由定理 2 可知 $B(x, y)$ 及 $B^{-1}(x, y)$ 有界, 则存在 $0 \leq h \leq H$ 和 $0 \leq l \leq L$, 使得 $h \leq \|B(x, y)\| \leq H, l \leq \|B^{-1}(x, y)\| \leq L$.

由于

$$\|y - x\| = \|B^{-1}(x, y)B(x, y)(y - x)\| \leq \|B^{-1}(x, y)\| \|B(x, y)(y - x)\|$$

所以有

$$\frac{1}{\|B^{-1}(x, y)\|} \leq \frac{\|B(x, y)(y - x)\|}{\|y - x\|}$$

所以就有

$$\frac{1}{L} \leq \frac{1}{\|B^{-1}(x, y)\|} \leq \frac{\|B(x, y)(y - x)\|}{\|y - x\|} \leq \|B(x, y)\| \leq H$$

证毕.

参考文献:

- [1] 刘彬清. 一类矩阵条件数的极小性[J]. 上海大学学报: 自然科学版, 2000, 6(4): 287-290.
- [2] 陈德辉. 关于矩阵条件数的一些讨论[J]. 华东师范大学学报: 自然科学版, 1986(3): 11-18.
- [3] 王成, 陈果良. 长方矩阵 p 条件数达极小的结构[J]. 高等学校计算数学学报, 1995(2): 164-175.
- [4] 黎稳, 陈小山. 关于矩阵谱条件数的估计[J]. 华南师范大学学报: 自然科学版, 2003, 3(3): 38-42.
- [5] 徐仲, 张凯院, 陆全, 等. 矩阵论简明教程[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 55.
- [6] WERNER C R. On measures of ill-conditioning for nonlinear equations[J]. Mathematics of Computation, 1976, 133: 104-111.
- [7] 奥特加 J M, 莱因博尔特 W C. 多元非线性方程组迭代解法[M]. 北京: 科学出版社, 1983: 70-71.
- [8] 欧文·雷斯齐格. 泛函分析导论及应用[M]. 北京: 北京航空学院出版社, 1987: 44-45.

A note on condition number of nonlinear equation

LIU Yu-xia, ZHOU Ji-dong

(College of Sciences, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract To obtain the condition number of the general nonlinear equations, a study was performed to draw a conclusion about the boundedness of norms in closed convex set according to the continuity of matrix norms. Then the estimated result of the bounds of condition numbers can be obtained based on the boundedness of norms and G -differentiability of functions. Moreover, some general conclusions about the boundedness of norms were given for the case that the coefficients of the equations form a square matrix.

Key words nonlinear equations; condition number; estimation of bound