非结构网格下两步压力校正算法的潮流模拟

邢领航[1,2],华祖林[1,2],褚克坚[1,2],鄢洪青[3]

(1.河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室,江苏 南京 210098;
2.河海大学环境科学与工程学院浅水湖泊综合治理与资源开发教育部重点实验室,江苏 南京 210098;
3.长江南京航道工程局,江苏 南京 210011)

摘要:针对非结构网格下的潮流数值计算,采用有限体积法离散基本方程,对流-扩散项离散采用幂率格式,交叉扩散项引入超松弛校正方法,水位校正方程应用 Rhie-Chow 动量插值思想和 SIMPLEC 类算法导出.采用两步压力校正法将交叉扩散项单独考虑,以提高模型对高度畸变网格的适应能力.计算结果表明,该处理方法可提高压力欠松弛系数,并能有效改善复杂区域潮流模拟的健壮性.通过对黄浦江感潮河段潮流的模拟,表明该模型的预测结果与实测资料吻合良好,模型对潮流的模拟结果是可靠的.

关键词:非结构网格;SIMPLEC;两步压力校正;幂率格式;感潮河段

中图分类号:O351　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-1980(2007)05-0505-05

在潮流计算中,有结构网格的 SIMPLE 类算法是一种有效的求解不可压流动的数值求解方法,在数值模拟中应用广泛.非结构网格能够很好地模拟复杂几何边界,且网格的剖分灵活,但 SIMPLE 类算法在潮流的非结构网格模拟中鲜有报道.为此,本文研究了基于非结构网格下的 SIMPLE 类算法潮流模型,为更加精细地模拟复杂区域的潮流提供了有力的手段.

对非结构网格,本文结合 SIMPLEC 算法思想并采用 Rhie-Chow 动量插值(MI)[1] 方法推导出水深校正方程.考虑到网格的非正交性,特别是对于高度畸变的网格,直接求解水深校正方程不仅计算的稳定性差,而且对压力欠松弛系数的限制较大,大大降低了求解的效率.因此,笔者借鉴了文献[2-3]中的分裂校正项思想,将非正交项分裂出来,进行二次压力修正校正.对流-扩散项的离散采用数值性能优良的幂率格式,模型的离散表达形式对于其他差分格式(上风格式、中心差分格式、混合格式和指数格式)也同样适用.交叉扩散项的计算采用数值性能稳定和计算精度较高的超松弛校正法(over-relaxed approach)[4-5] 进行计算.一般最小残差法(GMRES)[6] 加速了方程组的迭代求解,计算的矩阵经过不完全 ILUT 分解方法事先处理.利用上述数值方法离散了二维水深平均意义下的水流基本方程,并对感潮河段黄浦江的潮流进行了模拟.

1 数 值 方 法

1.1 基本方程

连续性方程:

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t}+\frac{\partial(\rho H u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho H v)}{\partial y}=0 \tag{1}$$

动量方程:

$$\frac{\partial(\rho H u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho H u u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho H u v)}{\partial y}=\rho f H v-\rho g H \frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho H \nu_t \frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho H \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}\right)+\tau_{sx}-\tau_{bx} \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\rho H v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho H v u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho H v v)}{\partial y}=-\rho f H u-\rho g H \frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho H \nu_t \frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho H \nu_t \frac{\partial v}{\partial y}\right)+\tau_{sy}-\tau_{by} \tag{3}$$

收稿日期:2007-05-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50679019,50009001);国家重点实验室开放研究基金资助项目(2005406811);江苏省社会发展科技计划资助项目(BS2006095);江苏 908 专项资助项目(JS-908-02-06)

作者简介:邢领航(1977—),男,江苏射阳人,博士研究生,主要从事环境水力学及水流水质数值模拟研究.

式中：ρ——水库密度；g——重力加速度；f——柯氏力；h——水位；H——水深；u,v——x,y方向沿水深平均流速；τ_{sx},τ_{sy}——风应力；τ_{bx},τ_{by}——河床底应力；ν_t——紊动黏性系数，其值采用半经验公式：

$$\nu_t = l_m\sqrt{(\partial u/\partial x)^2 + (\partial v/\partial y)^2}$$

其中l_m为混合长度，本文取$0.1H$[7].

1.2　方程离散

采用有限体积法(FVM)对控制方程进行离散.有限体积法从积分形式的N-S方程及连续方程出发.非定常不可压缩黏性流体的运动控制方程为方程(1)~(3)的通用积分形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho H\varphi \mathrm{d}V + \int_S (\rho H\varphi \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} - H\Gamma_\varphi \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S = \int_V S_\varphi \mathrm{d}V \tag{4}$$

式中：φ——通用变量；S——交界面面积；$\boldsymbol{n}$——单元面的单位外法向向量.

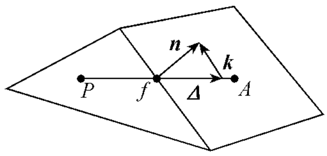


图1　计算单元

Fig.1　Computational element

时变项离散采用一阶差分格式，对流-扩散项离散应用数值性能良好的幂率格式，交叉扩散通量的计算引入适应网格变形能力强且数值性能稳定的超松弛校正法(over-relaxed correction)[4].各向量间的分解关系见图1，其中$\boldsymbol{\Delta}$为P单元中心指向相邻A单元中心的向量；$\boldsymbol{k}$为校正向量，由$\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\Delta}$来决定.界面梯度$(\nabla\varphi)_f$利用相邻单元梯度进行线性插值，即

$$(\nabla\varphi)_f = \omega_f(\nabla\varphi)_P + (1-\omega_f)(\nabla\varphi)_A \tag{5}$$

式中ω_f表示权函数.

在以上数值离散方法基础上，引入延时修正技术，并借鉴混合格式和幂指数格式[8]的推导过程，最终得到离散方程的具体形式为

$$\left[\frac{\rho_P H_P}{\Delta t}\Delta V_P + \sum_f D_f A(|P_f|) + 2(1-\omega_f)\max(-F_f,0) + \max(F_f,0)\right]\varphi_P - \sum_f [D_f A(|P_f|) + 2(1-\omega_f)\max(-F_f,0)]\varphi_A = \frac{\rho_{0,P}H_{0,P}}{\Delta t}\Delta V_P\varphi_{0,P} - \sum_f \min(F_f,0)\varphi_P + \sum_f A_f\rho_f H_f(\nu_t)_f(\nabla\varphi)_f\cdot\boldsymbol{k} + \int_V b\mathrm{d}V \tag{6}$$

$$F_f = \rho_f H_f(\boldsymbol{u}_f\cdot\boldsymbol{n}_f)A_f \qquad D_f = \rho_f|\boldsymbol{\Delta}|H_f(\nu_t)_f A_f/d_{AP}$$

式中：F_f——对流通量；D_f——离散的扩散系数；P_f——单元面Peclect数，由F_f和D_f的比值决定；$A(|P_f|)$——不同表达形式对应不同的计算格式，其定义如表1所示.方程(6)对于表中各种格式都是通用的.

表1　$A(|P_f|)$的定义

Table 1　Definition of $A(|P_f|)$

格式	均分$A(\|P_f\|)$	非均分$A(\|P_f\|)$
中心差分	$1-0.5\|P_f\|$	$1-(1-\alpha_f)\|P_f\|$；$\omega_f=\alpha_f$
上风格式	1	1；$\omega_f=0.5$
混合格式	$\max(0,1-0.5\|P_f\|)$	$\max(0,1-0.5\|P_f\|)$；$\omega_f=0.5$
幂率格式	$\max(0,(1-0.1\|P_f\|)^5)$	$\max(0,(1-0.1\|P_f\|)^5)$；$\omega_f=0.5$
指数格式	$\frac{\|P_f\|}{\exp\|P_f\|-1}$	$\frac{\|P_f\|}{\exp\|P_f\|-1}$；$\omega_f=0.5$

在数值计算过程中，为了避免迭代过程发散，一般采取欠松弛技术.对于离散的动量方程，速度的欠松弛因子直接用到代数方程组的求解过程中，最终生成代数方程组的主对角元系数中已包含了欠松弛因子.

1.3　水位校正方程两步校正算法

采用Rhie-Chow的动量插值思想[1]并结合SIMPLEC的压力校正算法，可得水位校正方程为

$$a_P h'_P - \sum_f a_{nb}h'_{nb} = b_\varphi \tag{7}$$

$$\begin{cases} a_P = \dfrac{\Delta V_P}{\Delta t} + \displaystyle\sum_f \dfrac{1}{a_f^U d_{AP}}H_f^2 A_f\rho_f g\Delta V_f \\ a_{nb} = \dfrac{1}{a_f^U d_{AP}}H_f^2 A_f\rho_f g\Delta V_f \\ b_\varphi = -\displaystyle\sum_f H_f A_f \boldsymbol{u}_f\cdot\boldsymbol{n}_f - \sum_f \dfrac{1}{a_f^U}H_f^2 A_f\rho_f g\Delta V_f(\nabla h')_f\cdot\boldsymbol{k} \end{cases} \tag{8}$$

在按式(7)的速度校正公式进行计算时，对压力校正必须采用亚松弛技术，压力校正公式为

$$h_1 = h^* + \alpha_p h' \tag{9}$$

速度校正公式为

$$\begin{cases} u_1 = u^* + u' = u^* - \dfrac{1}{a_{fu}}\displaystyle\int_V \rho g H \dfrac{\partial h'}{\partial x}\mathrm{d}V\Big|_f = u^* - \sum_f \dfrac{1}{a_{fu}}\rho_f g H_f A_f h'_f n_x \\ v_1 = v^* + v' = v^* - \dfrac{1}{a_{fv}}\displaystyle\int_V \rho g H \dfrac{\partial h'}{\partial y}\mathrm{d}V\Big|_f = v^* - \sum_f \dfrac{1}{a_{fv}}\rho_f g H_f A_f h'_f n_y \end{cases} \tag{10}$$

但在实际潮流模拟中，由于计算边界的复杂性，有时生成的计算网格往往并不严格正交. 特别在某些高度畸变的网格情况下，直接求解方程(7)会把压力欠松弛系数限制在很有限的范围之内[3]，不仅计算稳定性受到相当的影响，而且也增加了方程在非恒定流计算中的迭代次数，减少了计算时间步长，从而大大降低了其在潮流预报中的计算效率. 因此，笔者借鉴了文献[2-3]中的二步压力校正方法，即将方程(7)中的非正交项分裂出来，进行二次压力修正校正. 其校正过程如下：

$$a_P h''_P - \sum_f a_{nb} h''_{nb} = b'_\varphi \tag{11}$$

其中

$$a_P = \frac{\Delta V_P}{\Delta t} + \sum_f \frac{1}{a_f^U d_{AP}} H_f^2 A_f \rho_f g \Delta V_f \qquad a_{nb} = \frac{1}{a_f^U d_{AP}} H_f^2 A_f \rho_f g \Delta V_f$$

$$b'_\varphi = -\sum_f \frac{1}{a_f^U} H_f^2 A_f \rho_f g \Delta V_f (\nabla h')_f \cdot \boldsymbol{k}$$

压力校正公式可进一步校正为

$$h = h_1 + h'' \tag{12}$$

最终速度校正公式为

$$\begin{cases} u = u_1 + u'' = u_1 - \dfrac{1}{a_{fu}}\displaystyle\int_V \rho g H \dfrac{\partial h''}{\partial x}\mathrm{d}V\Big|_f = u^* - \sum_f \dfrac{1}{a_{fu}}\rho_f g H_f A_f h''_f n_x \\ v = v_1 + v'' = v_1 - \dfrac{1}{a_{fv}}\displaystyle\int_V \rho g H \dfrac{\partial h''}{\partial y}\mathrm{d}V\Big|_f = v^* - \sum_f \dfrac{1}{a_{fv}}\rho_f g H_f A_f h''_f n_y \end{cases} \tag{13}$$

经过两步压力校正之后，压力欠松弛系数的取值范围得到明显的改善，在本文的计算中其值可放大到 0.9，同时程序的收敛性能得到很大的提高，压力校正过程中的波动性也得到有效的抑制.

1.4　边界条件

水位、流速初始条件：

$$u_0 = 0 \qquad v_0 = 0 \qquad h_0 = h^*$$

式中：下标 0——初始时刻；h^*——初始时刻的水位.

入流、出流边界条件：

$$\frac{\partial u_{\mathrm{b}}}{\partial n} = \frac{\partial v_{\mathrm{b}}}{\partial n} = 0 \qquad h_{\mathrm{in}}(t) = h_{\mathrm{given,in}} \qquad h_{\mathrm{out}}(t) = h_{\mathrm{given,out}}$$

固边界条件：

$$u_{\mathrm{b}} = v_{\mathrm{b}} = 0$$

式中下标 b 表示岸边界.

1.5　干湿单元判断

给定一个很小的干湿单元水深判断标准 H_{CR}. $H < H_{\mathrm{CR}}$为干单元；$H > H_{\mathrm{CR}}$为湿单元.

2　黄浦江潮流实例验证计算

本文计算实例选用黄浦江上游大治河至下游黄浦公园段，全长约 29.5 km. 上、下边界采用 2003 年 7 月 30 日 10 时～2003 年 7 月 31 日 12 时实测大潮潮位资料. 流速验证点位见图 2 中的点 A_1 和点 A_2，计算网格采用三角形单元和四边形单元的混合布置方式，并在验证点位附近利用三角形网格进行局部加密. 计算网格单元总数为 6 166，节点总数为 6 007. 此外，为考证计算程序对高度畸变网格的适应能力，笔者将部分四边形网格斜交，最小交角仅为 30°左右(见图 2). 图 3 为大潮局部涨急和落急流场图. 由图 3 可见，主槽的流动速度较大，靠近岸边处流速相对较小，涨潮时进入弯道前的内侧流速较大，外侧流速较小，潮流出弯道时，内侧的流

速减缓,外侧流速增大,落潮时潮流场在弯道内外侧的大小分布与涨潮时相同,但流向相反.计算结果反应了该区域的潮流特性.图4为 A_1 和 A_2 的流速验证结果.由图4可见,流速的计算值和实测值总体上吻合良好,说明本文建立的数学模型对网格变形的适应能力很强,对潮流的模拟结果也是可靠的.

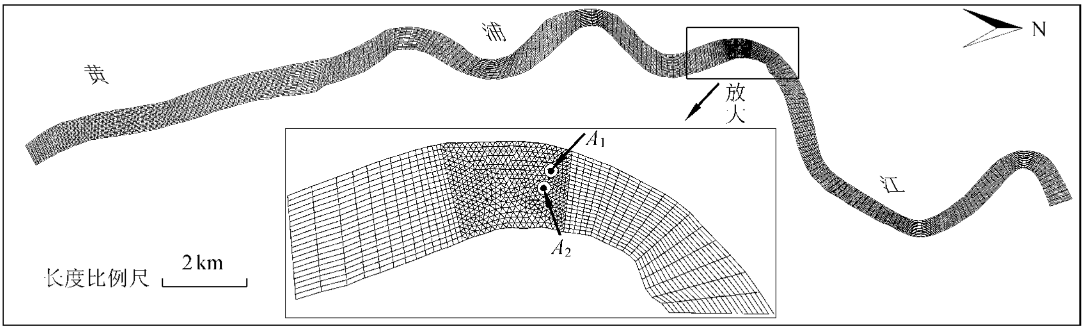
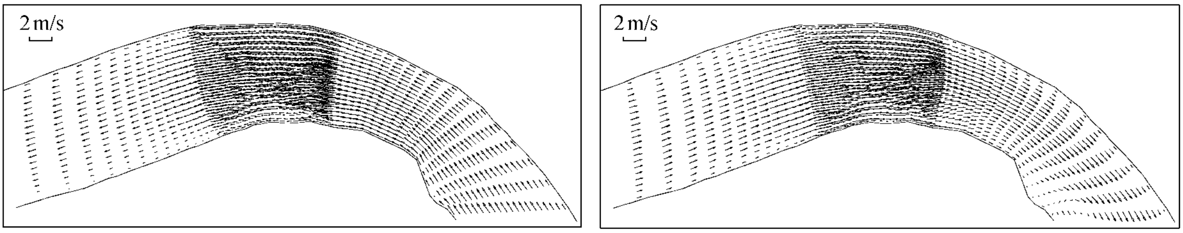


图2 计算网格

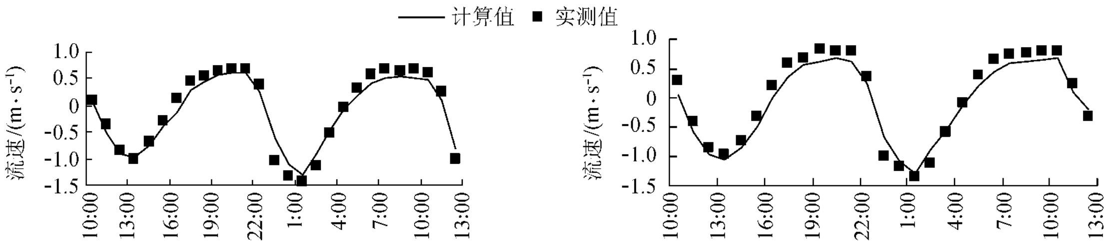
Fig.2 Computational grids



(a) 涨急 (b) 落急

图3 大潮流场

Fig.3 Local flow velocity distribution in spring tide



(a) A_1测点 (b) A_2测点

图4 大潮流速验证

Fig.4 Flow velocity verification at observation points in spring tide

表2 计算时间统计结果

Table 2 Statistic result of CPU time consumption

统计类型	CPU 耗时/s	占总耗时的比重/%
u 动量方程	879.62	13.12
v 动量方程	651.25	9.71
第一步压力校正	2461.45	36.71
第二步压力校正	2274.29	33.92
其　他	437.92	6.53

本文所建立的模型是在主频P4、内存1G的PC机上运行的,CPU耗时的统计结果见表2.由表2可见,U 动量方程和 V 动量方程的计算时间较为接近.而压力校正方程的计算时间几乎占去全部计算时间的70%左右.因此,减少压力校正方程的耗时对潮流计算效率是非常关键的.应用当今成熟的网格生成技术,完全可以生成正交性非常好的网格,从而忽略交叉扩散项而不影响水力模拟的精度,避免了压力校正方程的二次校正过程,将大大节省计算的耗时.

3 结　　语

a. 在非结构下,利用数值性能优良的幂率格式和基于SIMPLEC意义下的二次压力校正方法将水深平均的基本方程成功地应用于黄浦江段的潮流数值模拟中.计算结果表明,流速的计算值和实测值吻合良好,说明了模型对潮流数值模拟的可靠性.

b. 二次压力校正方法使得压力欠松弛系数的取值范围得到明显的改善,在本文的计算中其值可放大到 0.9.同时程序的收敛性能得到很大的提高,压力校正过程中的波动性也得到了有效的抑制.

c. 计算区域采用混合三角形单元和四边形单元进行剖分.模型对计算网格质量的要求较低,即使在高度畸变的网格下也能保证计算的收敛性,因此,增强了对复杂计算区域的水力模拟功能.

d. 非结构网格下的压力校正方程的计算时间几乎占去潮流计算时间的绝大部分,是潮流计算耗时的主要因素.

e. 本文模型建立的离散公式对多种差分格式都是通用的,程序编制简便易行.

f. 模型的整体健壮性能明显,可以适应地形变化大、岸边界变化复杂的计算区域,是一种值得在水利工程中推广的水力数值模拟方法.

参考文献:

[1] RHIE C M,CHOW W L. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with training-edge separation[J]. AIAA,1983,21:1525-1532.

[2] FERZIGER J H,PERIC M. Computational methods for fluid dynamics[M]. Berlin:Springer-Verlag,1997.

[3] TSUI Yeng-yung,PAN Yeng-feng. A pressure-correction method for incompressible flows using unstructured meshes[J]. Numerical Heat Transfer:Part B,2006,49:43-65.

[4] HRVOJE J. Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows[D]. London:The University of London and Diploma of Imperial College,1996.

[5] WANG Z J. A quadtree-based adaptive cartesian-quad grid flow solver for Navier-Stokes equations[J]. Computers & Fluids,1998,27(4):529-549.

[6] SAAD Y,SCHULTZ M H. Gmres:a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems[J]. SIAM J Sci Stat Comput,1986,7:856-869.

[7] 邢领航,华祖林. 基于三角单元外心下幂率格式在丁坝绕流中应用[J]. 水科学进展,1997,18(2):362-367.

[8] 金忠青. N-S 方程的数值解和紊流模型[M]. 南京:河海大学出版社,1987:145-150.

Two-step pressure correction method for tidal flow simulation with unstructured grids

XING Ling-hang[1,2], HUA Zu-lin[1,2], CHU Ke-jian[1,2], YAN Hong-qing[3]

(1. *State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing* 210098, *China*;

2. *Key Laboratory of Integrated Regulation and Resource Development on Shallow Lakes of Ministry of Education, College of Environmental Science and Engineering, Hohai University, Nanjing* 210098, *China*;

3. *Nanjing Yangtze River Waterway Engineering Bureau, Nanjing* 210011, *China*)

Abstract: The finite volume method (FVM) was adopted to discretize basic hydraulic equation for tidal flow simulation with unstructured meshes. The power law scheme was used to calculate convective flux and diffusive flux, the over-relaxed correction approach was employed to calculate cross diffusion flux, and Rhie-Chow's momentum interpolation method along with SIMPLEC procedure was used to derive water level correction equation. In order to improve the numerical robustness of the model under high grid deformation, two-step pressure correction method was applied to calculation of cross diffusion flux separately in the pressure correction equation. The numerical results show that this approach can improve the pressure under-relaxation coefficient and the effectiveness of complicated tidal flow simulation. The tidal flow simulation for tidal reaches of Huangpujiang River shows that the predicted results of the model agree well with the measured data; therefore the tidal flow simulated result of the model is reliable.

Key words: unstructured grid; SIMPLEC; two-step pressure correction; power law scheme; tidal reach