

无限均布压力作用下弹性地基的应力和位移

黄耀英¹,王润富²,吴中如¹

(1.河海大学水利水电工程学院,江苏 南京 210098;2.河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

摘要 通过两个典型的半无限体实例,对水平表面作用无限均布压力下弹性地基的应力和位移解答进行研究,结果表明:对边界条件不明确的无限边界仅采用解答的必要非充分条件——平衡条件来等效处理,其应力解答不是唯一的,因为此时该边值问题不是一个适定的数学问题.对弹性地基梁板中的半无限大地基、底部完全位移约束的有限深地基和底部光滑刚性支承的有限深地基在水平表面作用无限均布压力时的应力和位移分量进行了比较,认为底部完全位移约束的有限深地基模型较其他两种地基模型更合理.

关键词 弹性地基 无限均布压力 无限边界 平衡条件 半无限大地基 有限深地基

中图分类号:TU471.2 文献标识码:A 文章编号:1000-1980(2007)05-0518-06

众所周知,弹性力学问题在数学上被称为边值问题.因为在求解弹性力学问题时,使应力分量、应变分量、位移分量完全满足基本方程并不困难,但是,要使边界条件也得到完全满足往往很困难.为了能得到一些工程问题的理论解析解,常对边界条件进行一些等效近似的处理.例如,在小边界处使用圣维南原理进行等效处理.在半无限大问题中,采用平衡条件进行分析等.显然,按这种等效近似处理方法得到的解答的精确性和唯一性值得怀疑.针对上述问题,本文首先给出了两个在水平表面作用无限均布压力的半无限体实例,说明对边界条件不明确的无限边界仅采用解答的必要非充分条件——平衡条件来等效处理,由于此时该边值问题不是一个适定的数学问题,因此得到的解答不是唯一的.然后对弹性地基梁和板中的半无限大地基、底部完全位移约束的有限深地基和底部光滑刚性支承的有限深地基等 3 种地基模型在水平表面作用无限均布压力时的应力和位移解答进行了比较分析.

1 模型的提出

1.1 半无限大平面应变体模型

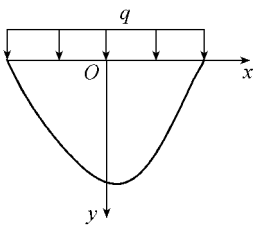


图 1 半无限大平面应变体
受无限均布压力作用

Fig.1 Semi-infinite plane strain body
under infinite uniform pressure

设有半无限大平面应变体,体力不计,在水平表面 $y = 0$ 处作用无限均布压力 q ,如图 1 所示.

对图 1 的弹性力学问题,为了求得其应力和位移分量,要满足的基本方程如下:

平衡微分方程
$$\sigma_{ij,i} = 0 \quad (i,j = 1,2) \tag{1}$$

几何方程
$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i,j = 1,2) \tag{2}$$

物理方程
$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E}(\sigma_{ij} - \mu\sigma_{ii}\delta_{ij}) \quad (i,j = 1,2) \tag{3}$$

其要满足的边界条件为在水平表面

$$\sigma_y|_{y=0} = -q \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0 \tag{4}$$

式中: σ_{ij} ——应力分量; ϵ_{ij} ——应变分量; u_i ——位移分量; E ——弹性模量; μ ——泊松比; δ_{ij} ——Kronecker 记号.

弹性力学教科书^[1-4]中一般将无限远边界认为是应力边界,并将应力边界条件转化为平衡条件(该平衡条件是解答的必要非充分条件):

$$\left\{\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{xy} dx &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_y dx + q(2 \cdot \infty) &= 0 \\ \sum M &= 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_y x + \tau_{xy} y) dx &= 0 \end{aligned}\right. \quad (5)$$

解答 1 应力解答: $\sigma_x = -\frac{\mu}{1-\mu}q \quad \sigma_y = -q \quad \tau_{xy} = 0$ (6)

位移解答:

$$u = 0 \quad v = -\frac{q(1-2\mu)(1+\mu)}{E(1-\mu)}y + B \quad (7)$$

式中 B 为任意常数.

将解答式(6)和式(7)代入基本方程及边界条件式(1)~(5),可知满足条件.

解答 2 应力解答: $\sigma_x = -q \quad \sigma_y = -q \quad \tau_{xy} = 0$ (8)

位移解答:

$$u = -\frac{q(1-2\mu)(1+\mu)}{E}x + B_1 \quad v = -\frac{q(1-2\mu)(1+\mu)}{E}y + B_2 \quad (9)$$

式中 B_1, B_2 为任意常数.

将解答式(8)和式(9)代入基本方程及边界条件式(1)~(5),可知满足条件.

解答 3 应力解答: $\sigma_x = A \quad \sigma_y = -q \quad \tau_{xy} = 0$ (10)

位移解答:

$$u = \frac{(1-\mu^2)A + \mu(1+\mu)q}{E}x + B_1 \quad v = -\frac{(1-\mu^2)q + \mu(1+\mu)A}{E}y + B_2 \quad (11)$$

式中 A 为任意常数.

将解答式(10)和式(11)代入基本方程及边界条件式(1)~(5),可知满足条件.

1.2 半无限大空间体模型

设有半无限大空间体,体力不计,在水平表面 $z = 0$ 处作用无限均布压力 q ,如图 2 所示.

对图 2 的弹性力学问题,为了求得其应力和位移分量,需要满足的基本方程如下:

平衡微分方程 $\sigma_{ij,i} = 0 \quad (i, j = 1, 3) \quad (12)$

几何方程 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = 1, 3) \quad (13)$

物理方程 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\mu)\sigma_{ij} - \mu\sigma_{ii}\delta_{ij}] \quad (i, j = 1, 3) \quad (14)$

其要满足的边界条件为在水平表面

$$\sigma_z|_{z=0} = -q \quad \tau_{xz}|_{z=0} = \tau_{yz}|_{z=0} = 0 \quad (15)$$

弹性力学教科书^[1-4]中一般将无限远边界认为是应力边界,并将应力边界条件转化为平衡条件(该平衡条件是解答的必要非充分条件):

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (16)$$

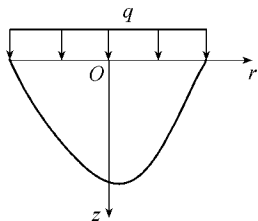


图 2 半无限大空间体受无限均布压力作用

Fig.2 Semi-infinite spatial body under infinite uniform pressure

$$\left\{\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{zx} dx dy &= 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{zy} dx dy &= 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_z dx dy + q(2 \cdot \infty)(2 \cdot \infty) &= 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y\sigma_z - z\tau_{zy}) dx dy &= 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x\sigma_z - z\tau_{zx}) dx dy &= 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y\tau_{zx} - x\tau_{zy}) dx dy &= 0 \end{aligned}\right. \tag{17}$$

解答 1 应力解答：

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\mu}{1-\mu}q \quad \sigma_z = -q \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0 \tag{18}$$

位移解答：

$$u = 0 \quad v = 0 \quad w = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}qz + B \tag{19}$$

将解答式(18)和式(19)代入基本方程与边界条件式(12)~(17),可知满足条件.

解答 2 一般情况,应力解答：

$$\sigma_x = A \quad \sigma_y = B \quad \sigma_z = -q \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0 \tag{20}$$

位移解答：

$$u = \frac{1}{E}(A - \mu(B - q))x + B_1 \quad v = \frac{1}{E}(B - \mu(A - q))y + B_2 \quad w = \frac{1}{E}(-q - \mu(A + B))z + B_3 \tag{21}$$

式中 A, B 为任意常数.

将解答式(20)和式(21)代入基本方程与边界条件式(12)~(17),可知满足条件.

由上面的分析可知,由于弹性力学中涉及的半无限大问题的无限远边界条件是不明确的,其可以为:
(a)应力边界条件 ;(b)位移边界条件 ;(c)混合边界条件.若对这个不明确的边界条件仅仅使用平衡条件(解答的必要非充分条件)来等效处理,则该问题不是一个适定的数学问题,从而会出现解答不唯一的情况.

2 分析比较

2.1 平面应变与轴对称荷载下空间地基模型

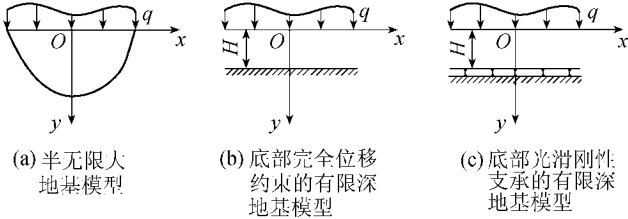


图 3 平面应变地基模型示意图

Fig.3 Sketch of plane strain elastic foundation model

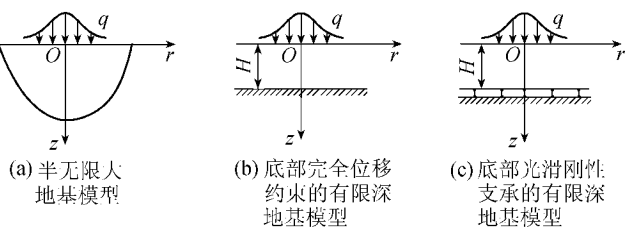


图 4 轴对称荷载下空间地基模型示意图

Fig.4 Sketch of spatial elastic foundation model under axially symmetric loading

目前在实际工程中,常使用图 3 和图 4 所示的 3 种地基模型^[5-7]:半无限大地基模型、底部完全位移约束的有限深地基模型和底部光滑刚性支承的有限深地基模型.

在文献[3,5-7]的基础上,笔者对图 3 和图 4 中 3 种常用的地基模型分别采用傅立叶变换^[8]和汉克尔变换^[9-10]进行了分析.

2.1.1 平面应变地基模型

a. 对于半无限大平面体地基模型,水平表面作用法向集中力时,采用傅立叶变换法求得的位移和应力分量与符拉芒解答是一致的^[3].

b. 当地基厚度 $H \rightarrow \infty$ 时,无论底部是完全位移约束的有限深地基模型还是底部为光滑刚性支承的有限深地基模型,在集中力作用下,其得到的水平表面位移分量与符拉芒解答的位移分量在水平表面的结果是一致的.

c. 3 种地基模型在水平表面作用无限均布压力时,其对应的应力分量和位移分量是不一致的.

d. 水平表面作用有限宽均布压力时,当地基厚度 $H \rightarrow 0$ 时,(a)对底部为完全位移约束的有限深地基模型,其对应的文克尔地基模型的基床系数为

$$k = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)H} \quad (|x| < \frac{c}{2})$$

式中 c 为均布压力宽度^[6]. (b)对底部为光滑刚性支承约束的有限深地基模型,其对应的文克尔地基模型的基床系数为

$$k = \frac{E}{(1-\mu^2)H} \quad (|x| < \frac{c}{2})$$

2.1.2 轴对称荷载下空间地基模型

a. 对半无限空间体地基模型,水平表面作用法向集中力时,采用汉克尔变换法求得的位移和应力分量与半空间体的布希涅斯克解答是一致的^[5].

b. 当地基厚度 $H \rightarrow \infty$ 时,无论底部是完全位移约束的有限深地基模型还是底部为光滑刚性支承的有限深地基模型,在法向集中力作用下,其得到的水平表面位移分量与布希涅斯克解答的位移分量在水平表面的结果是一致的.

c. 3 种地基模型在水平表面作用无限均布压力时,其对应的应力分量和位移分量是不一致的.

d. 水平表面作用轴对称有限宽均布压力时,当地基厚度 $H \rightarrow 0$ 时,(a)对底部为完全位移约束的有限深地基模型,其对应的文克尔地基模型的基床系数为

$$k = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)H} \quad (r < a)$$

式中 a 为轴对称均布压力半径^[7]. (b)对底部为光滑刚性支承约束的有限深地基模型,其对应的文克尔地基模型的基床系数为

$$k = \frac{E}{(1-\mu^2)H} \quad (r < a)$$

2.2 无限均布压力下地基模型比较

分别采用傅立叶变换和汉克尔变换分析^①得到半无限大地基模型、底部完全位移约束的有限深地基模型和底部光滑刚性支承的有限深地基模型,在水平表面作用无限均布压力时,在弹性体内产生的应力和位移分量,然后进行分析比较.

2.2.1 平面应变地基模型比较

a. 半无限大平面应变地基模型.

位移解答:

$$\begin{cases} u = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}qx & (x \rightarrow \infty, u \rightarrow \infty) \\ v = \frac{(1+\mu)q}{E}y + \frac{2(1-\mu^2)q}{E} \cdot \infty = \frac{(1+\mu)q}{E}y - \frac{2(1-\mu^2)q}{E}y + \infty = -\frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{E}qy + C \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{应力解答:} \quad \sigma_x = -q \quad \sigma_y = -q \quad \tau_{xy} = 0 \quad (23)$$

b. 底部完全位移约束的有限深地基模型.

$$\text{位移解答:} \quad u = 0 \quad v = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)q}{E(1-\mu)}(y-H) \quad (24)$$

$$\text{应力解答:} \quad \sigma_x = -\frac{\mu}{1-\mu}q \quad \sigma_y = -q \quad \tau_{xy} = 0 \quad (25)$$

c. 底部光滑刚性支承的有限深地基模型.

$$\text{位移解答:} \quad u = \frac{\mu(1+\mu)}{E}qx \quad v = -\frac{1-\mu^2}{E}q(y-H) \quad (26)$$

① 采用汉克尔变换对轴对称荷载下空间地基模型进行分析时,采用如下假设: $\lim_{a \rightarrow \infty} aJ_1(\xi a) \rightarrow \delta(\xi)$, 其中, $J_1(\xi a)$ 为一阶 Bessel 函数, $\delta(\xi)$ 为 Dirac 函数.

应力解答:

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = -q \quad \tau_{xy} = 0 \quad (27)$$

将上述位移和应力解答分别代入式(10)和式(11),可知满足条件式(1)~(5),即满足基本方程、水平表面的应力边界条件以及无限远边界由应力边界条件转换来的平衡条件.

2.2.2 空间地基模型比较

a. 半无限大空间体地基模型.

位移解答:

$$\begin{cases} u_r = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)q_r}{2E} & (r \rightarrow \infty, u_r \rightarrow \infty) \\ w = \frac{1+\mu}{E}qz + \frac{2(1-\mu^2)q}{E} \cdot \infty = \frac{1+\mu}{E}qz - \frac{2(1-\mu^2)q}{E}qz + \infty = \frac{1}{E}(-1+\mu+2\mu^2)qz + C \end{cases} \quad (28)$$

应力解答:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{1+2\mu}{2}q \quad \sigma_z = -q \quad \tau_{zr} = 0 \quad (29)$$

式中 C 为任意常数.

b. 底部完全位移约束的有限深地基模型.

位移解答:

$$u_r = 0 \quad w = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}(z-H) \quad (30)$$

应力解答:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{\mu}{1-\mu}q \quad \sigma_z = -q \quad \tau_{zr} = 0 \quad (31)$$

c. 底部光滑刚性支承的有限深地基模型.

位移解答:

$$u_r = \frac{(1+\mu)\mu q_r}{2E} \quad w = -\frac{(1-\mu^2)q}{E}(z-H) \quad (32)$$

应力解答:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -\frac{\mu q}{2} \quad \sigma_z = -q \quad \tau_{rz} = 0 \quad (33)$$

将上述位移和应力解答分别代入式(20)和式(21)可知满足条件式(12)~(17).

d. 由文献[1]可知,半空间体在水平表面作用无限的均布压力时,其正确的应力解答为

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\mu}{1-\mu}q \quad \sigma_z = -q \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (34)$$

e. 由 2.2.1 的 b 可知,在图 3 中,无限均布压力下的底部完全位移约束的有限深地基模型的应力解答为式(25).

将式(25)应力解答转换到空间坐标系下,并考虑平面应变问题是空间问题的特殊情况(对称性),有 $\epsilon_y = 0$. 由式(25)及几何方程和物理方程容易得到

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\mu}{1-\mu}q \quad \sigma_z = -q \quad \tau_{xz} = 0 \quad (35)$$

比较 2.2.2 的 b, d 和 e 可知,三者的解答是一致相通的.

f. 由 2.2.1 的 c 可知,在图 3 中,无限均布压力下的底部光滑刚性支承约束的有限深地基模型的应力解答为式(27).

将式(27)应力解答转换到空间坐标系下,并考虑平面应变问题的对称性,由几何方程和物理方程容易得到

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = -\mu q \quad \sigma_z = -q \quad \tau_{xz} = 0 \quad (36)$$

注意到,2.2.2 中的 c 和 f 的应力解答的应力第一不变量 Θ 是满足的,即

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z = -\mu q - q \quad (37)$$

通过上述的比较分析后可知,在水平表面作用无限均布压力时,底部完全位移约束的有限深地基模型的应力分量解答与正确的应力解答是一致的,其他的则不一致的. 由此可见,半无限大地基模型和底部光滑刚性支承的有限深地基模型是相对不合理的地基模型.

3 结 语

a. 对弹性力学中的半无限体问题的边界条件进行了研究,给出了两个典型的半无限体反例,说明了对

边界条件不明确的无限远边界仅采用解答的必要非充分的平衡条件来等效处理,此时该边值问题不是一个适定的数学问题,因此确定的解答不是唯一的.

b. 分别采用傅立叶变换和汉克尔变换对荷载作用下的弹性地基梁和板中的半无限大地基模型、底部完全位移约束的有限深地基模型和底部光滑刚性支承的有限深地基进行了分析:虽然当地基厚度 $H \rightarrow \infty$ 时,无论底部是完全位移约束的有限深地基模型还是光滑刚性支承的有限深地基模型,在集中力作用下,其得到的水平表面位移分量分别与半平面体符拉芒解答和半空间体布希涅斯克解答的位移分量在水平表面的结果是一致的,但是 3 种地基模型在水平表面作用无限均布压力时,其对应的应力分量和位移分量是不一致的.

c. 对在水平表面作用无限均布压力时的应力和位移分量进行了比较,认为底部完全位移约束的有限深地基模型较半无限大地基模型和底部光滑刚性支承的有限深地基模型更合理些.

本文得到同济大学吴家龙教授、河海大学卓家寿教授和张子明教授等的指导,特表感谢!

参考文献:

[1] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社,1990 284-286 300-305.
[2] 铁摩辛柯,古地尔. 弹性理论[M]. 徐芝纶,译. 北京: 高等教育出版社,1990 42 475-481.
[3] 吴家龙. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社,2001 98-101 134-136.
[4] 钱伟长,叶开沅. 弹性力学[M]. 北京: 科学出版社,1956 204-207.
[5] 郭大智,冯德成. 层状弹性体系力学[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社,2001 51-57
[6] 赵光恒,张子明. 有限深地基上基础梁的计算[J]. 华东水利学院学报, 1984,12(2) 32-45.
[7] 张子明,赵光恒. 用初始函数法计算成层地基在轴对称荷载作用下的位移和应力[J]. 华东水利学院学报,1985,13(4) 40-48.
[8] 刘蕴华,张乃良. 数学物理方程及其运用[M]. 南京: 河海大学出版社,1994 146-151.
[9] 王竹溪,郭敦厚. 特殊函数概论[M]. 北京: 北京大学出版社,2000 369-370.
[10]《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社,1979.

Study on elastic foundation under infinite uniform pressure

HUANG Yao-ying¹, WANG Run-fu², WU Zhong-ru¹

(1. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China ;
2. College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract :Case study was performed on two typical semi-infinite bodies to investigate the stress and displacement of elastic foundation under infinite uniform pressures on horizontal surface. The result showed that, if only the necessary but insufficient condition, the equilibrium condition, was adopted to deal with the infinite uncertain boundary condition, the solution to the stress was non-unique due to the fact that the boundary problem here was a mal posed mathematic problem. Based on a comparison of stress and displacement components of the semi-infinite elastic foundation, the elastic finite depth foundation with rigid constraint at the bottom, and the elastic finite depth foundation with smooth rigid supporting constraint at the bottom under infinite uniform pressure on horizontal surface, it is concluded that the elastic finite deep foundation model with rigid constraint at the bottom is more rational than other two models.

Key words :elastic foundation ; infinite uniform pressure ; infinite boundary ; equilibrium condition ; semi-infinite foundation ; finite deep foundation