

简单管水力系统水击的级数解析解

朱永忠¹ 索丽生² 张 健²

(1. 河海大学理学院 ,江苏 南京 210098 ; 2. 河海大学水利水电工程学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 : 针对简单水力系统的基本方程 ,考虑阀门按线性关闭历时规律的初始条件和边界条件 ,利用该偏微分方程组的形式解 ,推导出时间关于系统末端水击的一阶线性微分方程 ,从而求解了系统末端水击的隐式解析解 . 进一步从数学上将水击分解成均具有级数解的两部分 ,利用三角级数展开的方法分别求解其级数解 ,最后给出了水击级数解析解的表达式 .

关键词 : 水击 ; 水力系统 ; 级数解析解 ; 偏微分方程

中图分类号 : TV131 文献标识码 : A 文章编号 : 1000-1980(2007)05-0577-04

水击的研究对于水电站非常重要 ,它是有压非恒定流研究中一个重要的内容 . 常用的水击基本方程是一组偏微分方程组 ,外加具体水力单元的初始条件和边界条件 . 这些方程组一般很难求出其解析解 ,大多是讨论求解最大水击压力的解析计算公式^[1] . 一般情况下是利用特征线法将该微分方程组化为全微分方程 ,然后沿特征线积分 ,计算出任意位置、任意时刻处的压力和流量的大小^[2] . 关于水击的各种数值计算方法已有很多研究^[3-7] . 若能够求出水击过程的解析解 ,无论是对水击的理论还是对水击的数值计算方法研究都会有很大的帮助 .

本文针对简单的水力系统 ,利用线性关闭历时规律 ,从理论上严格推导了水电站水击压力的级数解析表达式 .

1 水击基本方程

图 1 为一简单水库-管道-阀门水力系统 . 若忽略摩阻影响 ,并假设阀门开度依直线规律从 τ_0 关至全关($\tau_1 = 0$) ,即管道末端流量从 $Q_0 \rightarrow 0$,利用文献[8-9]中的分析 ,其模型为

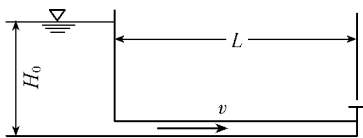


图 1 简单水力系统示意图
Fig.1 Sketch of simple hydraulic system

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

(1)

满足初始和边界条件

$$\begin{cases} H(x , 0) = H_0 \\ H(0 , t) = H_0 \\ v(L , t) = \left(1 - \frac{t}{T_c} \right) a \sqrt{H(L , t)} \\ 0 \leq x \leq L , t > 0 \end{cases}$$

(2)

式中 : v ——管道中的流速 ,向下游为正 ; H ——测压管水头 ; x ——距离 ,以管道进口为原点 ,向下游为正 ; t ——时间 ; c , g ——水击波速和重力加速度 ; T_c ——闸门开度变化历时 ; a ——阀门过流系数 ,该值为常数 ,为简化其后的推导过程 ,按单位“ 1 ”考虑 .

2 模型求解

记 $H(L, t) = p(t)$, 利用方程 (1) 和 (2) 的形式解^[10]可以推导有 $H(x, 0) = 0$ 及波动方程

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (3)$$

于是原问题化为下述问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \\ H(x, 0) = H_0 \\ H(0, t) = H_0 \\ H(L, t) = p(t) \\ H_t(0, t) = 0 \\ p(0) = H_0 \end{cases} \quad (4)$$

令 $H(x, t) = z(x, t) + f(x, t)$, 其中 $f(x, t) = \frac{p(t) - H_0}{L}x + H_0$, 从而式 (4) 可化为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (5)$$

满足条件 $z(x, 0) = 0$, $z(0, t) = 0$, $z(L, t) = 0$, $z_t(x, 0) = -\frac{x}{L}p'(0)$.

由 $v(L, t) = \left(1 - \frac{t}{T_c}\right) \sqrt{H(L, t)} = \left(1 - \frac{t}{T_c}\right) \sqrt{p(t)}$, 可得 $p(t) = \frac{v^2(L, t)}{\left(1 - \frac{t}{T_c}\right)^2}$, 两边求导有

$$p'(t) = \frac{2v(L, t)\sqrt{p(t)} + \frac{2}{T_c}p(t)}{\left(1 - \frac{t}{T_c}\right)} \quad (6)$$

又由式 (1) 和式 (2) 的形式解可以得出 $v_x(x, t) = H_x(x, t)$, 进而 $v_x(L, t) = H_x(L, t)$. 于是有

$$\begin{cases} v(L, t) + gH_x(L, t) = 0 \\ H_t(L, t) + \frac{c^2}{g}v_x(L, t) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

于是

$$v(L, t) = -gH_x(L, t) \quad (8)$$

从而

$$v(L, t) = -gH_x(L, t) = -gv_x(L, t) = g \frac{g}{c^2} H_t(L, t) = \frac{g^2}{c^2} p'(t) \quad (9)$$

代入式 (6) 并化简得

$$p'(t) = \frac{-\frac{2c^2}{T_c}p(t)}{2g^2\sqrt{p(t)} - c^2\left(1 - \frac{t}{T_c}\right)} \quad (10)$$

即

$$\frac{dt}{dp} + \frac{t}{2p} = \frac{T_c}{2p} - \frac{g^2 T_c}{c^2 \sqrt{p}} \quad (11)$$

式 (11) 为 t 关于 p 的一阶线性微分方程, 加上初始条件 $p(0) = H_0$ 求解有^[11]

$$t = T_c - \frac{g^2 T_c}{c^2} \sqrt{p} + \frac{g^2 T_c H_0 - c^2 T_c \sqrt{H_0}}{c^2 \sqrt{p}} \quad (12)$$

此即为 p 关于 t 的隐函数方程, 可见 p 与 t , T_c , c 及 H_0 等都有关系。

设公式 (5) 的解及 $f_{it}(x,t)$ 具有级数形式^[10]

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{13}$$

$$f_{it}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{14}$$

式中 $z_n(t)$ 待定，

$$f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f_{it}(x,t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = (-1)^{n+1} \frac{2p''(t)}{n\pi} \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{15}$$

由式 (5) 有

$$z_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 z_n(t) = -f_n(t) \tag{16}$$

解得其解为

$$z_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t - \frac{L}{n\pi c} \int_0^t f_n(s) \sin \frac{n\pi c(t-s)}{L} ds \tag{17}$$

于是有 $\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$ 其中 $a_n = 0, n = 1, 2, \dots$ 由初始条件 $\varphi(x,0) = 0$ 得到.

又由

$$z_n(x,0) = -\frac{x}{L} p'(0) = \frac{2c^2 H_0 x}{(2g^2 \sqrt{H_0 - c^2}) L T_c} \tag{18}$$

可得

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{4L}{(n\pi)^2} \frac{c^2 H_0}{(2g^2 \sqrt{H_0 - c^2}) T_c} \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{19}$$

综上有

$$\begin{aligned} \varphi(x,t) = & \frac{4c^2 L H_0}{\pi^2 (2g^2 \sqrt{H_0 - c^2}) T_c} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{L} t \sin \frac{n\pi x}{L} - \\ & \frac{2}{\pi^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \int_0^t p''(s) \sin \frac{n\pi c(t-s)}{L} ds \sin \frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \tag{20}$$

于是

$$H(x,t) = \varphi(x,t) + f(x,t) \tag{21}$$

其中 $f(x,t) = \frac{p(t) - H_0}{L} x + H_0$ 从而可得水头 $H(x,t)$ 的级数解析表达式.

3 结 论

关于水电站水击一般情况下是利用特征线法计算出任意位置、任意时刻处的压力和流量的大小,这只能得出水击的数值结果,无法对水击做出理论分析.本文虽然没有给出水击的解析解,但给出了水击的幂级数解,利用幂级数解的表达式不仅可以对水击进行近似数值计算,同时还可以从理论上对水击进行进一步的分析.但是本文给出的幂级数解中 $p(s)$ 的表达式是隐式的,若能进一步得出显式的水击幂级数表达式,对水击的理论分析将会起到更加重要的作用.

参考文献：

[1] 唐晓寅,叶江涛.长管水击最大水击压强的解析[J].后勤工程学院学报,2004(2):32-36.
[2] WYLIE E B,STREETER V L,LISHENG S.Fluid transients in system[M].New Jersey:Prentice-Hall,Inc,1993.
[3] IZQUIERDO J,IGLESIAS P L.Mathematical modeling of hydraulic transients in simple systems[J].Mathematical and Computer Modeling,2002,35(6):801-812.
[4] 刘保华.长引水隧洞电站调压室的水力计算及工况选择[J].水力发电学报,1995(4):47-55.
[5] BRUNO B,BRYAN K W,MARCO F.Velocity profiles and unsteady pipe friction in transient flows[J].Journal of Water Resource

Planning and Managent 2000(8) 236-244.

[6] 孙新岭 雍歧卫 蒋明 等.有限元法在管道水击计算中的应用探索 [J].后勤工程学院学报 2000(1) 67-69.

[7] 祁雪春 陈永灿 刘昭伟.水电站管道水击计算的自适应网格法 [J].水利水电技术 2001 32(5) :14-17.

[8] 王世泽.水电站建筑物 [M].北京 水利电力出版社 ,1987 :140-200.

[9] 华东水利学院.水力学 [上册 M].北京 科学出版社 ,1984 80-220.

[10] 谷超豪 李大潜 陈恕行 等.数学物理方程 [M].2 版.北京 高等教育出版社 2002 68-160.

[11] 伍卓群 李勇.常微分方程 [M].北京 高等教育出版社 2004 82-168.

Series solution to waterhammer of simple pipe hydraulic system

ZHU Yong-zhong¹ ,SUO Li-sheng² ,ZHANG Jian²

(1. College of Sciences , Hohai University , Nanjing 210098 , China ;

2. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract In consideration of the initial condition and boundary condition for the basic equation of a simple hydraulic system with valves closed linearly , a one-order linear differential equation of time with respect to waterhammer at the end of the system was derived by use of the form solution to the partial differential equations , and the implicit analytical solution to waterhammer was obtained. Furthermore , the waterhammer was divided into two parts with series solutions , and the series solutions were obtained by expansion of trigonometric series. Finally , the series formula for the solution to waterhammer was given.

Key words waterhammer ; hydraulic system ; series solution ; partial differential equation

全国中文核心期刊 中国科技核心期刊
全国水利系统优秀期刊 华东地区优秀期刊 江苏省优秀期刊

《水利水电科技进展》征订启事

(邮发代号 28-244 ,CN32-1439/TV ,ISSN1006-7647 ,双月刊)

《水利水电科技进展》由河海大学主办 ,主要刊登与水科学、水工程、水资源、水环境等学科有关的科技论文 ,设有研究探讨、工程技术、水管理、专题综述、国外动态、科技简讯等栏目 ,适合与水科学、水工程、水资源、水环境等有关的科学研究人员、工程技术人员、科技管理人员以及大专院校师生阅读.

《水利水电科技进展》由邮局发行 ,邮发代号 28-244 2008 年每期定价 10 元 ,全年 6 期共计 60 元 .读者亦可直接向编辑部订阅 .欢迎个人和单位直接汇款订阅或函索订单 .编辑部地址 :210098 南京市西康路 1 号河海大学《水利水电科技进展》编辑部 .联系电话 025-83786335 ,E-mail :jz@hhu.edu.cn ,http ://kkb.hhu.edu.cn .

汇款时务请注明“订水利水电科技进展”.