

湖泊水体年龄与水体中放射性同位素浓度关系浅析

童海滨¹ 陈建生²

(1.河海大学水文水资源学院,江苏 南京 210098;2.河海大学同位素水文研究所,江苏 南京 210098)

摘要:为了研究湖泊水体年龄与水体中放射性同位素浓度之间的定量关系,运用数学物理方法给出了湖泊水体年龄展开为湖泊水体中放射性同位素浓度的函数表达式.在介绍年龄输运方程概念及其意义的基础上,以微分方程为分析工具,根据质量守恒原理和放射性衰变原理,利用微元法分别推导了湖泊水体的年龄输运方程和湖泊水体中放射性同位素浓度的变化规律,并给出了各自的解析解.在此两者的基础上给出了湖泊水体年龄与水体中放射性同位素浓度之间的函数关系.

关键词:湖泊;年龄输运方程;放射性同位素浓度;水体年龄

中图分类号:P342 文献标识码:A 文章编号:1000-1980(2007)06-0647-04

水文同位素的应用已经涉及水利科学与工程各个方面,例如在地下水来源的判别^[1-2]、水文循环机理的探讨^[3-4]、水文测验^[5-6]、水利工程安全检测^[7]等方面都得到了应用.本文借鉴文献[8]的思路,采用数学物理方法,探讨湖泊同位素水文中的确定性问题.在放射性衰变原理和年龄输运方程^[9]的基础上,讨论湖泊水体年龄与湖泊水体中放射性同位素浓度之间的函数关系.

1 年龄输运方程的意义

溶质输运方程的一种特殊形式——年龄输运方程(age transport equation),可用于直接模拟地下水的年龄^[9-10].它是通过增加一个零阶增长条件来实现的,该条件表示溶质内部的生产过程.研究一个年龄输运方程时,浓度由相应的年龄所取代,该年龄表示所研究水体的体积平均年龄,零阶增长率有一个单位数值,假定不呈现出衰减和吸附反应,并且通常情况下,流入水的年龄假定为零.当解释扩散和其他输运过程的影响时,这种类型的分析允许将地下水模型模拟的结果直接与环境示踪剂显示的信息进行比较.本文把年龄输运方程的概念运用到湖泊水体年龄的分析中,建立湖泊水体年龄输运方程并用于分析湖水的年龄与入湖和出湖流量的关系.

2 湖泊水体年龄输运方程及其解析解

假设湖泊属于单输入单输出类型,在 t 时刻湖水的体积为 V ,入湖流量为 I ,出湖流量为 O ,湖水的体积平均年龄为 T .现在分析 $[t, t + \Delta t]$ 时段内湖水年龄的变化情况.根据年龄输运方程的概念^[1], $[t, t + \Delta t]$ 时段内流入湖泊的水量为 $I\Delta t$,年龄为零,流出湖泊的水量为 $O\Delta t$,年龄为 T ;在 t 时刻体积为 V 、年龄为 T 的“原来”的湖水经过 Δt 时段后,年龄变为 $T + \Delta t$;在 $t + \Delta t$ 时刻整个湖泊水体的体积平均年龄变为 $T + \Delta T$,则

$$(I\Delta t) \times 0 + V(T + \Delta t) - (O\Delta t)T = (V + \Delta V)(T + \Delta T) \quad (1)$$

成立(如图 1 所示,在此情况下暗含入流为降水的假定),整理得

$$V - OT = \frac{(V + \Delta V)(T + \Delta T) - VT}{\Delta t} \quad (2)$$

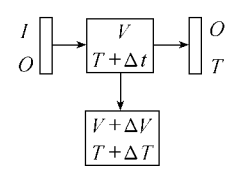


图 1 用于推导湖泊水体年龄输运方程的微元水体
Fig.1 Differential elements of water body for derivation of age-transport equation of lake water

令 $\Delta t \rightarrow 0$,对式 (2) 两边取极限并忽略高阶无穷小项 ,得

$$V - OT = \frac{d(VT)}{dt} \tag{3}$$

把水量平衡方程

$$\frac{dV}{dt} = I - O \tag{4}$$

代入式 (3) 并化简 ,得

$$\frac{dT}{dt} + T \frac{I}{V} = 1 \tag{5}$$

设初始条件为

$$T(0) = T_0 \tag{6}$$

解式 (5) 和式 (6) 组成的定解问题 ,得

$$T = \left(\int_0^t e^{\int_0^t c(\tau) d\tau} d\tau + T_0 \right) e^{-\int_0^t c(\tau) d\tau} \tag{7}$$

其中

$$c = \frac{I}{V} = \frac{I}{V_0 + \int_0^t (I - O) dt} \qquad V = V_0 + \int_0^t (I - O) dt$$

式 (7) 直观地表示了湖泊水文系统在瞬态条件下通过“新水”的补给和老水的“排泄”后 ,整个湖泊水体的新老程度.

在 $I = O = \text{常数}$ 的条件下 ,式 (7) 变为

$$T = T_0 e^{-ct} + \frac{1 - e^{-ct}}{c} \tag{8}$$

其中

$$c = \frac{I}{V_0}$$

式 (8) 直观地表示了湖泊水文系统在稳态条件下通过“新水”的补给和老水的“排泄”后 ,整个湖泊水体的年龄随时间的变化规律.

在 $I = O = 0$ 的条件下 ,式 (7) 变为

$$T = T_0 + t \tag{9}$$

式 (9) 表示湖泊水体在没有入流和出流的情况下 ,湖泊水体在 t 时刻的年龄即是起始时刻 (0 时刻) 水体的年龄 T_0 加上从起始时刻到时刻 t 所经过的时间 (亦即 t). 这显然是正确的 ,它从一个侧面验证了本文所建立的关于湖泊水体年龄输运方程的正确性.

3 湖泊水体中放射性同位素浓度变化规律及其解析表达式

设在 t 时刻 ,湖泊水体中放射性同位素浓度为 R ,衰变常数^[11]为 λ ;入湖流量中水的放射性同位素浓度为 R_i ,其余符号同前. 假定湖水混合均匀 ,根据放射性衰变定律^[3]和质量守恒定律建立 Δt 时段前后湖泊水体中放射性同位素的质量平衡方程 (图 2):

$$(VR + IR_i \Delta t - OR \Delta t) e^{-\lambda \Delta t} = (V + \Delta V)(R + \Delta R) \tag{10}$$

整理得

$$(IR_i - OR) e^{-\lambda \Delta t} = \frac{VR - VR e^{-\lambda \Delta t} + V \Delta R + R \Delta V + \Delta V \Delta R}{\Delta t} \tag{11}$$

忽略式 (11) 中的高阶项 ($\Delta V \Delta R$) 并两边取极限 ,得

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} ((IR_i - OR) e^{-\lambda \Delta t}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{VR - VR e^{-\lambda \Delta t}}{\Delta t} + \frac{V \Delta R + R \Delta V}{\Delta t} \right) \tag{12}$$

对式 (12) 右边极限运算中的第 1 项应用罗贝塔法则^[12] ,第 2 项应用导数定义 ,得

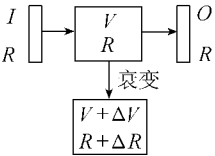


图 2 用于推导湖泊水体中放射性同位素浓度变化的微元水体
Fig.2 Differential elements of water body for derivation of variation of radioactive isotope concentration in lake water

$$(IR_i - OR) = \lambda VR + V \frac{dR}{dt} + R \frac{dV}{dt} \tag{13}$$

把水量平衡方程(式 4)代入放射性同位素的质量平衡平衡方程(式 13)),整理得

$$\frac{dR}{dt} + \left(\lambda + \frac{I}{V} \right) R - \frac{I}{V} R_i = 0 \tag{14}$$

设初始条件为

$$R(0) = R_0 \tag{15}$$

解式(14)和式(15)所组成的定解问题,得

$$R = \left(\int_0^t g(\tau) e^{\int_0^\tau a(\tau) d\tau} d\tau + R_0 \right) e^{-\int_0^t a(\tau) d\tau} \tag{16}$$

其中

$$g = cR_i = \frac{I}{V} R_i = \frac{I}{V_0 + \int_0^t (I - O) dt} R_i \quad a = \lambda + c = \lambda + \frac{I}{V} = \lambda + \frac{I}{V_0 + \int_0^t (I - O) dt}$$

式(16)表示在湖泊水文系统处于瞬态条件下,湖泊水体中放射性同位素浓度与入湖流量及其放射性同位素浓度、出湖流量之间的函数关系.

在 $I = O = \text{常数}$ 的条件下,式(16)变为

$$R = \left(\int_0^t g(\tau) e^{a\tau} d\tau + R_0 \right) e^{-at} \tag{17}$$

其中

$$g = cR_i = \frac{I}{V_0} R_i \quad a = \lambda + \frac{I}{V_0}$$

在 $I = O = \text{常数}$ 的前提下,如果 R_i 亦为常量,则式(16)变为

$$R = \frac{g}{a} (1 - e^{-at}) + R_0 e^{-at} \tag{18}$$

其中

$$g = cR_i = \frac{I}{V_0} R_i \quad a = \lambda + c = \lambda + \frac{I}{V_0}$$

如果 $I = O = 0$,亦即湖泊水体处于既无入流又无出流的情况下,则式(16)变为

$$R = R_0 e^{-\lambda t} \tag{19}$$

这正是关于放射性同位素衰变原理的简单形式.式(19)从一个侧面说明了本文所得出的关于湖泊水体放射性同位素浓度变化规律的解析式(式 16))的正确性.

4 湖泊水体中放射性同位素浓度和湖泊水体年龄的关系

联立式(5)和式(14),从中消去 I/V 得

$$(R - R_i) \frac{dT}{dt} - \left(\frac{dR}{dt} + \lambda R \right) T - (R - R_i) = 0 \tag{20}$$

式(20)表达了湖泊水体放射性同位素浓度随时间的变化与湖泊水体年龄随时间的变化在数量上必须满足的约束关系.联立式(6)和式(15),得

$$T \Big|_{R=R_0} = T_0 \tag{21}$$

解由式(20)和式(21)所组成的关于 T 的定解问题,得

$$T = \left(\int_0^t e^{-\int_0^\tau \left(\frac{dR(\tau)}{d\tau} + \lambda R(\tau) \right) d\tau} d\tau + T_0 \right) e^{\int_0^t \left(\frac{dR(\tau)}{d\tau} + \lambda R(\tau) \right) d\tau} = \left(\int_0^t e^{-\int_0^\tau \frac{R' + \lambda R}{R - R_i} d\tau} d\tau + T_0 \right) e^{\int_0^t \frac{R' + \lambda R}{R - R_i} d\tau} \tag{22}$$

式(22)表示湖泊水体年龄随时间的变化展开为湖泊水体中放射性同位素浓度随时间的变化的显式函数关系,可用于根据湖泊水体放射性同位素浓度解译湖泊水体年龄的研究.

5 结 语

本文把年龄输运方程的概念运用于湖泊水体,建立了关于湖泊水体的年龄输运方程,并给出了其解析

解,该解析解定量地刻画了湖泊水体年龄与入湖和出湖流量之间的数量关系,随后以质量守恒原理、放射性衰变原理为基础,利用微元法推导了湖泊水体中放射性同位素浓度变化规律并给出了其解析解,该解析解定量描述了湖泊水体中放射性同位素浓度与出、入湖水流量及其放射性同位素浓度之间的数量关系,在此两者的基础上探讨了湖泊水体年龄与湖泊水体中放射性同位素浓度之间的关系,并给出了湖泊水体年龄随时间的变化展开为湖泊水体中放射性同位素浓度随时间的变化的显式函数关系式.本文研究为用确定性数学模型定量地解译湖泊水体中放射性同位素浓度数据与湖泊水体年龄的关系提供了帮助.本文研究仅限于湖泊的单输入单输出情况,并且湖泊水体年龄输运方程内含假定入流为降水,存在一定的局限性,湖泊多入流多出流的情况将是下一步需要研究的课题.

参考文献：

[1] MEBUS A G. 顾慰祖.阿拉善高原地下水的稳定同位素异常[J].水科学进展,1998,19(4):333-337.
[2] 陈建生,汪集,赵霞,等.用同位素方法研究额济纳盆地承压含水层地下水的补给[J].地质论评,2004,50(6):649-658.
[3] 顾慰祖.利用环境同位素及水文实验研究集水区产流方式[J].水利学报,1995,26(5):9-24.
[4] 顾慰祖,谢民.同位素示踪划分藤桥流域流量过程线的试验研究[J].水文,1997,17(1):23-31.
[5] 陈建生,陈亮,焦月宏,等.水流含沙量同位素监测系统[J].河海大学学报:自然科学版,2002,30(3):96-98.
[6] 高正夏,徐军海,王建平,等.同位素技术测试地下水流速流向的原理及应用[J].河海大学学报:自然科学版,2003,31(6):655-658.
[7] 陈建生,张发明,张虎成.龙羊峡大坝同位素示踪方法探测渗流场研究[J].河海大学学报:自然科学版,1999,27(6):1-6.
[8] 董海滨,陈建生,汪集.河道水体中氢氧稳定同位素组成的微分方程模型[J].水科学进展,2007,18(4):552-557.
[9] GOODE D J. Direct simulation of groundwater age[J]. Water Resources Research,1996,32(2):289-296.
[10] GOODE D J. Age, double porosity, and simple reaction modifications for the MOC3D ground-water transport mode[R]. Reston, Virginia: U.S. Geol. Survey,1999.
[11] MOOK W G. Environmental isotopes in the hydrological cycle: theory, methods, review[C]//MOOK W G. Environmental isotopes in the hydrological cycle. Vienna: IHS of IAEA,2001:75-88.
[12] 同济大学数学教研室.高等数学:上[M].北京:高等教育出版社,1996:320-405.

Relationship between age of lake water and concentration
of radioactive isotopes in water body

TONG Hai-bin¹, CHEN Jian-sheng²

(1. College of Hydrology and Water Resources, Hohai University, Nanjing 210098, China ;
2. Research Institute of Isotope Hydrology, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract : The age of lake water body was expressed as a function of the concentration of radioactive isotopes in the water body by use of the math-physical method for research of the quantitative relationship between the two factors. Based on an introduction of the concept of the age-transport equation and the principles of mass conservation and radioactive decay, the differential equation was taken as the diagnostic tool for derivation of the age-transport equation of lake water and the variation regularity of the concentration of radioactive isotopes in the water body, and their analytic solutions were obtained. Then, the relationship between the age of lake water body and the concentration of radioactive isotopes in the water body was derived.

Key words : lake ; age-transport equation ; concentration of radioactive isotope ; age of water body