

# 蚁群优化算法及其在可靠指标计算中的应用

韩宪军,武清玺,杨明珠

(河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098)

**摘要:**从可靠指标的几何意义出发,结合罚函数法,将结构可靠指标的求解问题转化成相应的无约束优化问题.在求解过程中,为避免因结构功能函数的高度非线性给求导运算等带来的复杂性,尝试用蚁群优化算法进行结构可靠指标的优化计算,推导了有关公式并编制了计算程序.实例应用表明,用蚁群优化算法进行结构可靠指标计算是可行的.

**关键词:**工程结构;蚁群优化算法;可靠指标

**中图分类号:** TU311.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-198X(2007)06-0664-04

工程中常用的可靠指标计算方法主要有一次二阶矩法、JC 法、梯度优化法以及响应面法等<sup>[1]</sup>,它们在工程结构可靠度分析中发挥着重要的作用.但是这些方法都或多或少地涉及到功能函数导数的计算,而在实际工程结构可靠度分析中,许多功能函数往往表现出高度复杂的非线性特征,其导数计算有时会不胜其烦.因而,寻找其他一些不用导数计算可靠指标的优化求解方法引起了许多学者的广泛关注<sup>[2-4]</sup>.此类研究的一个共同点,就是从可靠指标的几何意义出发,将其转化为相应的最值优化问题来求解.最值优化问题已有的求解方法可以分为传统方法和智能方法两大类,尽管它们都能够求解函数的最值,但不同程度地存在一定的局限性<sup>[5-6]</sup>,如:传统方法计算复杂性较大,且容易丢失全局最优解,而诸如模拟退火算法、遗传算法这些一般的智能算法的精度和效率低,收敛速度慢,等等.鉴于此,受生物觅食机制的启发,一些新的智能算法逐渐兴起并引起了人们的广泛兴趣,蚁群优化算法就是其中之一.

蚁群优化算法(也称蚂蚁优化算法, ant colony optimization algorithm, ACA or AA)是意大利学者多里戈等于 20 世纪 90 年代初期提出的一种新型的全局搜索算法<sup>[7-9]</sup>.该算法综合运用了正反馈、分布式计算和贪婪式启发搜索技术,可用于求解一般形式的非凸、非线性约束优化问题.由于该算法不涉及到目标函数的偏导数计算,且能够克服其他算法容易陷入局部最优的缺点,因而具有较强的适应性.目前,蚁群优化算法已成功应用于包括函数优化<sup>[6,8-11]</sup>、水利工程<sup>[12-13]</sup>、边坡工程<sup>[14]</sup>在内的诸多领域.作为尝试,本文从可靠指标的几何意义出发,将可靠指标的计算问题转化成相应的非线性规划问题,然后用蚁群优化算法来进行可靠指标的搜索计算,期望得到有益的结论.

## 1 可靠指标的几何意义及其优化模型

由结构可靠度理论可知,可靠指标的几何意义是:标准正态坐标空间中原点到极限状态曲面的最短距离<sup>[1]</sup>.这样,可靠指标计算问题即可以转化为如下最优化问题<sup>[4,15]</sup>:

$$\begin{cases} \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T \\ \beta = \min f(\mathbf{X}) = \min \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \right)^2 \right]^{1/2} \\ \text{s.t.} \quad g_v(\mathbf{X}) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, m) \\ X_i^l \leq X_i \leq X_i^u \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{X}$ ——基本向量; $\beta$ ——可靠指标; $\mu_{X_i}, \sigma_{X_i}, X_i^l, X_i^u$ ——随机变量  $X_i$  的均值、标准差、下限和上限; $g_v(\mathbf{X})$ ——功能函数.

显然方程组 (1) 是一个约束优化问题,可以采用罚函数法将其转化为相应的无约束优化问题<sup>[16]</sup>:

$$F(X) = f(X) + M \left\{ \sum_{v=1}^m [g_v(X)]^2 + \sum_{i=1}^n [(\min(0, X_i - X_i^L))^2 + (\min(0, X_i^U - X_i))^2] \right\} \tag{2}$$

$$\beta = \min F(X) \tag{3}$$

式中  $M$  为罚因子(为足够大的正数),相应的项则称为罚项.

2 可靠指标计算的蚁群优化算法

2.1 蚁群优化算法的基本原理

仿生学家经过大量研究发现,蚂蚁个体之间是通过一种被称为信息素(pheromone,又称外激素)的物质进行信息传递的.蚂蚁在运动过程中,能够在它所经过的路径上留下这种物质,而且能够感知该物质的存在,并以此指导自己的运动方向.因此,由大量蚂蚁组成的蚁群的集体行为便表现出一种信息正反馈现象:某一条路径上走过的蚂蚁越多,则后来者选择该路径的概率就越大.蚂蚁个体之间就是通过这种信息的交流达到搜索食物的目的<sup>[7]</sup>.可以用图 1 来形象地说明蚁群优化算法的基本原理,其中竖线代表一只蚂蚁经过的由蚁穴  $E$  到食物  $A$  的路径,而水平线  $ch$  代表在某一个时刻突然出现的障碍物.障碍物的出现使得蚂蚁能根据各路径上信息素的浓度自动地改变行进路径,其路径演化过程为:图 1(a)→图 1(b)→图 1(c),详细说明参见文献<sup>[17]</sup>.

2.2 可靠指标计算的蚁群优化算法实现

为讨论方便起见,下面首先给出有关定义及符号:对每个蚂蚁  $i$ ,定义其评价函数为相应的目标函数,其值  $F_i$  由式(2)计算;定义转移概率  $P_{ij}$  为

$$P_{ij} = \frac{\tau_i^\alpha \Delta F_{ij}^\gamma}{\sum_k \tau_k^\alpha \Delta F_{ik}^\gamma} \tag{4}$$

式中:  $\tau_i$ ——蚂蚁  $i$  的半径为  $r$  邻域内的信息素数量;  $\Delta F_{ij} = F_i - F_j$ ;  $\alpha, \gamma$ ——蚂蚁在运动过程中所积累的信息和启发因子在蚂蚁路径选择中所起的不同作用,即各自的重要程度,均为非负参数.

蚁群优化算法的搜索过程<sup>[9]</sup>如下:

a. 设置有关参数,如蚂蚁个数  $N_{ant}$ 、最大迭代次数  $s_{max}$ 、初始邻域半径  $r = r^{(0)}$ (上标括号内数字为迭代次数,开始取为 0)、信息素的保持率  $\rho$ 、蚂蚁  $i$  邻域内的初始信息素的数量  $\tau_i = \tau_i^{(0)} = c$ ( $c$  为一很小的正数)、信息素增量  $\Delta\tau_i^{(0)} = 0$ 、单位蚂蚁遗留的信息素数量  $Q$  以及  $\alpha$  和  $\gamma$ . 将给定个数的蚂蚁按随机原则<sup>[18]</sup>散布在解的定义域内,记录具有最好评价函数值的精英蚂蚁.

b. 按式(4)计算得到的转移概率移动各蚂蚁并嵌入邻域搜索机制以寻找更好解.具体地说,就是对于蚂蚁  $i$ ,如果  $\Delta F_{ij} > 0$ ,则蚂蚁  $i$  以概率  $P_{ij}$  移至蚂蚁  $j$ ;否则,以邻域半径  $r = r^{(s)}$  进行邻域搜索,即:在邻域内搜索比当前点更优的解,若在指定的次数内找到了更优解,则将原解替换并按式(4)计算的转移概率移动蚂蚁;反之则保留原解不变,进入下一轮计算.

c. 按信息素更新规则进行轨迹更新.不同的更新规则对应于不同的蚁群优化算法,如基本蚁群算法(ACA)、最大-最小蚂蚁系统(MMAS)算法、蚁群系统(ACS)算法等.本文采用 ACA,相应的更新规则为

$$\tau_i = \tau_i^{(s+1)} = \rho\tau_i^{(s)} + \Delta\tau_i^{(s+1)} \tag{5}$$

式中:  $\Delta\tau_i^{(s+1)} = \Delta\tau_i^{(s)} + Q$ ,为信息素增量.更新完成后令  $\Delta\tau_i^{(s+1)} = 0$ .

d. 按比例收缩邻域半径,通常取  $r^{(s+1)} = 0.99r^{(s)}$ ,并令迭代次数  $s$  累加 1.

e. 判断终止条件.终止条件可以有 2 种选择:一是给定迭代搜索次数,二是给定收敛精度,一般取前后 2 次迭代结果可靠指标之差的绝对值不大于 0.01 即可<sup>[1]</sup>.通常的做法是两者结合使用,既限定迭代搜索次数,

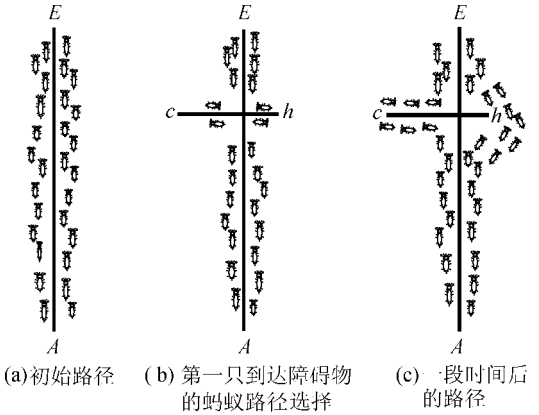


图 1 蚂蚁路径示意图  
Fig.1 Sketch of an ant's path

同时给出迭代收敛误差,当满足其中之一时即停止计算.本文也采用这种做法.

不断地重复 **b**~**e**,使算法能找到问题的最优解或较好解.

### 2.3 算法参数的确定

蚁群优化算法的研究尚处于起步阶段,算法参数的选取目前尚无理论上的依据,文献[8]给出的经验结果为: $1 \leq \alpha \leq 5$ , $1 \leq \gamma \leq 5$ , $0.5 \leq \rho \leq 0.99$ , $\rho$ 取0.7左右为最佳; $1 \leq Q \leq 10\,000$ , $Q$ 对算法的影响不大.本文计算过程中参数取值如下<sup>[8-9]</sup>: $\alpha = \gamma = 1$ , $r = 0.5$ , $\rho = 0.7$ , $Q = 1$ .

在针对旅行商问题(TSP)的研究中,有研究者<sup>[11]</sup>建议蚂蚁个数 $N_{\text{ant}}$ 的选择宜为 $n_{\text{city}}/2 \sim n_{\text{city}}$ 之间,其中 $n_{\text{city}}$ 为城市个数.但对于一般优化问题,目前尚无类似成果.此外文献[6]研究表明,蚂蚁个数 $N_{\text{ant}}$ 越大时,在较少的迭代搜索中找到最优解的概率就越大,但具体取多大为好该文并未给出结果.为此,根据前人已有的研究成果与笔者的实践,建议蚂蚁个数 $N_{\text{ant}}$ 可初步确定为

$$N_{\text{ant}} = \begin{cases} n & 2 \leq n \leq 5 \\ \frac{n}{2} \sim n & 6 \leq n \leq 10 \\ \frac{n}{3} \sim \frac{n}{2} & n \geq 11 \end{cases} \quad (6)$$

式中: $n$ 为基本向量的维数,亦即基本随机变量的个数.

## 3 算 例

根据上述方法,笔者编制了求解结构可靠指标的蚁群优化算法计算程序.为了验证本文提出的可靠指标计算的蚁群优化算法,现举例说明.

例1<sup>[1]</sup> 某圆截面直杆如图2所示,承受拉力 $P = 100\text{ kN}$ ,设杆的直径 $d$ 和材料的应力屈服极限 $F_y$ 均为正态随机变量,其均值和标准差分别为: $\mu_d = 3\text{ cm}$ , $\sigma_d = 0.3\text{ cm}$ ;  $\mu_{F_y} = 290\text{ MPa}$ , $\sigma_{F_y} = 25\text{ MPa}$ .计算直杆的抗拉可靠指标.

由应力表示的直杆抗拉极限状态方程为

$$Z = g(F_y, d) = F_y - \frac{4P}{\pi d^2} = 0 \quad (7)$$

采用蚁群优化算法进行计算,使用笔者编制的程序,通过2只蚂蚁,迭代3次后得到直杆的抗拉可靠指标为 $\beta = 2.872\,21$ ,同时得到设计验算点值为: $F_y^* = 266.818\text{ MPa}$ , $d^* = 2.185\text{ cm}$ ,迭代过程见表1,表中提供的数据为每次迭代中的最优解.文献[1]采用改进的一次二阶矩法和梯度优化法得到的直杆抗拉可靠指标分别为2.872和2.873;而文献[19]采用遗传算法经过16代计算得到的结果为2.872 21.

例2<sup>[2]</sup> 图3所示是密度为 $2\,000\text{ kg/m}^3$ 的毛石挡土墙示意图,被挡的土有一水平表面,上面作用有正态型均布超载 $W_s$ ,均值和标准差分别为: $\mu_{W_s} = 15\text{ kPa}$ , $\sigma_{W_s} = 2.5\text{ kPa}$ .被挡黏性土密度 $\rho_1$ 和内摩擦角 $\varphi_1$

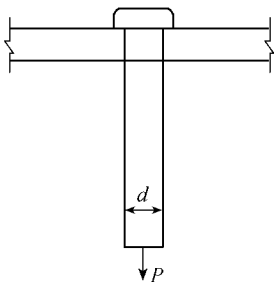


图2 直杆示意图  
Fig.2 Sketch of a straight rod

表1 例1的可靠指标

Table 1 Reliability indices for example 1

| 迭代次数 | 随机变量             |               | $\beta$  |
|------|------------------|---------------|----------|
|      | $F_y/\text{MPa}$ | $d/\text{cm}$ |          |
| 初始值  | 271.539          | 2.165         | 2.878 63 |
| 1    | 271.543          | 2.165         | 2.878 40 |
| 2    | 266.882          | 2.184         | 2.878 18 |
| 3    | 266.818          | 2.185         | 2.872 21 |

均为正态随机变量,均值和标准差分别为: $\mu_{\rho_1} = 2\,000\text{ kg/m}^3$ , $\sigma_{\rho_1} = 150\text{ kg/m}^3$ ;  $\mu_{\varphi_1} = 40^\circ$ , $\sigma_{\varphi_1} = 1.5^\circ$ .地基土是粒状土,内摩擦角 $\varphi_2$ 为正态随机变量,均值和标准差分别为: $\mu_{\varphi_2} = 40^\circ$ , $\sigma_{\varphi_2} = 3.0^\circ$ .墙基与地基土的摩擦系数 $f = \tan \varphi_2$ .试确定挡土墙抵抗滑动的可靠指标.

极限状态方程为

$$Z = 180f - 6K_a W_s - 18\rho_1 K_a = 0 \quad (8)$$

式中: $Z$ 的单位为kN;主动土压力系数 $K_a$ 的朗肯表达式为

$$K_a = \frac{1 - \sin \varphi_1}{1 + \sin \varphi_1} \quad (9)$$

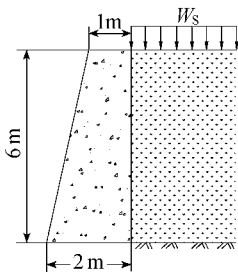


图3 挡土墙示意图  
Fig.3 Sketch of a retaining wall

使用笔者编制的程序,通过4只蚂蚁,迭代3次后得到可靠指标为  $\beta = 2.974$ ,同时得到设计验算点值为:  $W_S^* = 11.521 \text{ kPa}$ ,  $\rho_1^* = 1\,828.3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\varphi_1^* = 39.271^\circ$ ,  $\varphi_2^* = 33.054^\circ$ , 迭代过程见表2.与文献[2]用改进Powell法得到的结果  $\beta = 3.001$  相比,二者基本吻合.

4 结 论

- a. 算例结果表明,采用蚁群优化算法进行结构可靠指标计算是可行的.
- b. 与其他现有的优化方法相比,可靠指标计算的蚁群优化算法克服了其他优化方法易陷入局部最优解的不足,且突破了其他优化方法仅适用于凸函数的限制,具有较强的适用性.
- c. 可靠指标计算的蚁群优化算法避免了其他常用算法在功能函数对随机变量求导数方面带来的复杂性难题,且思路明确,编程实现方便,在计算精度和效率方面可以满足工程要求,具有一定的推广应用价值.

参考文献:

[1] 武清玺. 结构可靠性分析及随机有限元法[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005: 45-99.

[2] 冷伍明, 赵善锐. 用不求导数的最优化计算可靠度指标[J]. 西南交通大学学报, 1993(3): 58-63.

[3] 贾超, 刘宁, 陈进. 用方向加速法求解结构的可靠度指标[J]. 金属矿山, 2003(6): 14-15.

[4] 陈刚, 张林, 陈健康, 等. 复合形法在拱坝结构可靠度分析中的应用[J]. 水利学报, 2003(2): 98-101.

[5] 王凌. 优化算法及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001: 1-16.

[6] 张玉兰, 朱庆保. 求解连续函数最大值的蚂蚁优化算法[J]. 南京师范大学学报: 工程技术版, 2005, 25(3): 61-63.

[7] 蔡自兴, 徐光佑. 人工智能及其应用[M]. 3版. 北京: 清华大学出版社, 2004: 181-185.

[8] 马良. 全局优化的一种新方法[J]. 系统工程与电子技术, 2000, 22(9): 61-62.

[9] 马良. 基于蚂蚁算法的函数优化[J]. 控制与决策, 2002, 17(增刊): 719-722.

[10] 詹士昌, 徐婕. 用于多维函数优化的蚁群算法[J]. 应用基础与工程科学学报, 2003, 11(3): 223-228.

[11] 秦玲. 蚁群算法的改进与应用[D]. 扬州: 扬州大学, 2004.

[12] 田明俊, 周晶. 基于蚁群算法的土石坝土体参数反演[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(8): 1141-1146.

[13] 陈刚, 马光文, 付兴友, 等. 蚁群算法在拱坝结构可靠度分析中的应用[J]. 水力发电, 2006, 32(7): 34-36.

[14] 李亮, 迟世春, 林皋. 基于蚁群算法的复合形法及其在边坡稳定分析中的应用[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(5): 691-696.

[15] 禹智涛, 韩大建. 结构可靠度分析的优化算法[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 2003, 31(4): 82-84.

[16] 胡运权. 运筹学教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998: 168-172.

[17] 温文波, 杜维. 蚁群算法概述[J]. 石油化工自动化, 2003(1): 19-22.

[18] RIPLEY B D. Stochastic simulation[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1987: 52-60.

[19] 俞晓正, 武清玺, 朱宝昌. 基于软计算下的结构可靠度的分析与计算[J]. 河北理工学院学报, 2002, 24(4): 74-78.

Ant colony optimization algorithm and its application to calculation of structural reliability index

HAN Xian-jun, WU Qing-xi, YANG Ming-zhu

( College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China )

**Abstract:** From the geometric meaning of reliability index, the problem of structural reliability index was converted to the corresponding unconstrained optimization problem by use of the penalty function method. During the solving process, the ant colony optimization algorithm was adopted for optimal calculation of structural reliability index so as to avoid the complexity in derivation of the structural function induced by its high nonlinearity. Relevant formulas were derived and a computer program was compiled. Case studies show that the ant colony optimization algorithm is feasible for calculating the structural reliability index.

**Key words:** engineering structure; ant colony optimization algorithm(ACA); reliability index

表2 例2的可靠指标

Table 2 Reliability indices for example 2

| 迭代次数 | 随机变量             |                                        |                      |                      | $\beta$ |
|------|------------------|----------------------------------------|----------------------|----------------------|---------|
|      | $W_S/\text{kPa}$ | $\rho_1/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$ | $\varphi_1/(^\circ)$ | $\varphi_2/(^\circ)$ |         |
| 初始值  | 13.124           | 1719.4                                 | 40.478               | 32.774               | 3.157   |
| 1    | 13.470           | 1992.8                                 | 43.364               | 34.291               | 3.004   |
| 2    | 20.523           | 2038.0                                 | 37.968               | 35.653               | 2.980   |
| 3    | 11.521           | 1828.3                                 | 39.271               | 33.054               | 2.974   |