

一类发展方程初边值问题差分法的收敛性

胡庆云

(河海大学理学院,江苏 南京 210098)

摘要 研究用差分法求解自治的发展方程初边值问题时稳定性和收敛性之间的联系.引入反投影算子将发展方程初边值问题的差分格式转化为与初值问题差分格式类似的逐步推进的形式,从而得出满足 Von Neumann 条件的差分格式是稳定的格式.在相容条件下,差分格式若稳定(或满足 Von Neumann 条件)则格式收敛,且对古典解的差分逼近有误差估计式,不再需要线性的条件.

关键词 发展方程;初边值问题;非线性;稳定性;收敛性;Von Neumann 条件

中图分类号 O241.82 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2007)06-0735-04

本文研究的问题如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L\left(x, \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\right)u \quad (x \in \Omega, 0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

$$u(0) = u_0(x) \quad (x \in \Omega) \quad (2)$$

$$\tilde{L}\left(x, \frac{\partial^{\beta}}{\partial x^{\beta}}\right)u \Big|_{\partial\Omega} = \mu(t, x) \quad (x \in \partial\Omega, 0 \leq t \leq T) \quad (3)$$

其中 $L\left(x, \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\right)$ 和 $\tilde{L}\left(x, \frac{\partial^{\beta}}{\partial x^{\beta}}\right)$ 是非线性算子,不显含时间 t ; $\Omega \subset R_d$ 是混合初边值问题(1)~(3)以下简称初边值问题)解的定义域, $\partial\Omega$ 是它的边界,其他符号说明见文献[1-2].要求提出的初边值问题是恰当的.

设 $t \geq 0$,记笛卡尔乘积 $\partial\Omega^t = [t, T] \times \Omega$.构造 $2p$ 维向量函数空间 $H^t = [L_2(\Omega)]^p \times [L_2(\partial\Omega^t)]^p$,在 H^t 上定义 + 数乘: $\{u(x), \alpha(t, x)\} + \{\nu(x), \beta(t, x)\} = \{u(x) + \nu(x), \alpha(t, x) + \beta(t, x)\}$, $k\{u(x), \alpha(t, x)\} = \{ku(x), k\alpha(t, x)\}$, 定义非负函数 $p(\cdot)$: $p(\{u(x), \alpha(t, x)\}) = \|u(x)\|_{\Omega} + \|\alpha(t, x)\|_{\partial\Omega^t}$, 其中: $\|u(x)\|_{\Omega}^2 = \sum_{i=1}^p \int_{\Omega} [u_i(x)]^2 dx$, $\|\alpha(t, x)\|_{\partial\Omega^t}^2 = \sup_{s \in [t, T]} \sum_{i=1}^p \int_{\partial\Omega} [\alpha_i(s, x)]^2 dx$. 易知: $\{H^t, +, \text{数乘}, p(\cdot)\}$ 是 Banach 空间, 以后记: $\|\cdot\| = p(\cdot)$. 易知 $\|\alpha(t, x)\|_{\partial\Omega^t}$ 在函数 $\alpha(t, x)$ 固定时, 是 $t \in [0, T]$ 的单减函数.

记 P_1 为空间 H^t 到 $[L_2(\Omega)]^p$ 的投影算子, P_2 为空间 H^t 到 $[L_2(\partial\Omega^t)]^p$ 的投影算子.

用差分法对初边值问题离散化, 设得步进式的计算格式如下:

$$U(t + (n+1)\tau, x) = P_1 \alpha(\tau, x) \{U(t + n\tau, x), \mu(t + n\tau + s, x)\} \quad (0 \leq t, s \leq T; n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

其中 $U(t + n\tau, x)$ 是初边值问题在 $t + n\tau$ 时的差分解; $P_1 \alpha(\tau, x)$ 表示从 $t + n\tau$ 时刻到 $t + (n+1)\tau$ 时刻之间的对应关系. 由于 $L\left(x, \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\right)$ 和 $\tilde{L}\left(x, \frac{\partial^{\beta}}{\partial x^{\beta}}\right)$ 不显含时间 t , 所以 $P_1 \alpha(\tau, x)$ 也不明显依赖于 t . 以下为叙述简洁起见, 在不影响正确性的前提下, 将省写空间变量 x .

本文的结论是: 差分格式(4)在相容的条件下, 稳定性保证收敛性; 满足 Von Neumann 条件保证稳定性; 在相容条件和满足 Von Neumann 条件下, 差分解收敛于真解.

1 定 义

定义 1 设 $u_0(x) \in [L_2(\Omega)]^p$, $\mu(t, x) \in [L_2(\partial\Omega^0)]^p$ 存在唯一的满足式(2)和式(3)的 $u(t) \in D(L)$, 使得当 $\tau \rightarrow 0$ 时, 对于 $t \in [0, T]$ 一致成立:

$$\left\| \frac{u(t+\tau) - u(t)}{\tau} - L\left(x, \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) u(t) \right\|_{\Omega} \rightarrow 0 \quad (5)$$

则称 $u(t)$ 为初边值问题的古典解,把古典解用算子延拓后得到的向量函数称为广义解.若对 $\forall \{u_0, \mu\} \in S \subset H^0$, 存在唯一的满足式(2)和式(3)的解 $u(t)$, 则称初边值问题在 S 上可解.

称初边值问题在 S 上适定.如果 (a) 初边值问题在 S 上可解 (b) 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \{u_0, \alpha\}, \{v_0, \beta\} \in S$, 当 $\|\{u_0, \alpha\} - \{v_0, \beta\}\| < \delta$ 时, 对应初边值问题的解 $u(t), v(t)$ 关于 t 一致地有 $\|u(t) - v(t)\|_{\Omega} < \varepsilon$.

构造反投影算子 $\alpha(\tau)$ 为

$$\{U(t + (n+1)\tau), \mu(t + (n+1)\tau + s)\} = \alpha(\tau) \{U(t + n\tau), \mu(t + n\tau + s)\}$$

其中 $\mu(t + (n+1)\tau + s) = P_2 \alpha(\tau) \{U(t + n\tau), \mu(t + n\tau + s)\}$. 可用该映射来说明边界条件的使用状况.

定义2 $\forall G \subset H^0$, 称差分格式(4)在 G 上满足相容条件.如果初边值问题在 G 上可解, $\forall \{u_0, \mu(t)\} \in G$, 设方程相应解为 $u(t)$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $\tau < \delta$ 时, 关于 t 一致地有:

$$\|u(t + \tau) - P_1 \alpha(\tau) \{u(t), \mu(t + s)\}\|_{\Omega} < \varepsilon \quad (6)$$

$\forall S \subset H^0$, 称差分格式(4)在 S 上是相容的.如果存在稠密子集 $G \subset S$, 初边值问题在 S 上可解, 在 G 上古典可解, 差分格式(4)在 G 上满足相容条件(6).

如果初边值问题在 S 上可解, $\forall \{u_0, \mu(t)\} \in S$, 设相应解为 $u(t) (0 \leq t \leq T)$, $\exists \tau_0 = \tau(\{u_0, \mu\}) > 0$, 和 $\exists \delta_0 = \delta(\{u_0, \mu\}) > 0$, 记管形邻域 $O(\{u_0, \mu\}, \delta_0) = \{\{\omega(x), \rho\omega(s, x)\} | \|\{\omega, \rho\omega\} - \{u(t), \mu(t + s)\}\| < \delta_0, 0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq T - t\} \subset H^1$, 在 $O(\{u_0, \mu\}, \delta_0)$ 内, 存在稳定界 $K_0 > 0, \forall \{v(t), \beta(t)\} \in O(\{u_0, \mu\}, \delta_0) \cap D[\alpha(\tau)]$, 其中 $\beta(t) = u(t)|_{\partial\Omega}$, 当 $\tau \leq \tau_0$ 时, 关于 $0 \leq n \leq \frac{T}{\tau}$ 一致地有:

$$\|[\alpha(\tau)]^n \{u(t), \mu(t + s)\} - [\alpha(\tau)]^n \{v(t), \beta(t + s)\}\| \leq K_0 \|\{u(t), \mu(t + s)\} - \{v(t), \beta(t + s)\}\| \quad (7)$$

则称差分格式(4)在 $S \subset H^0$ 上是稳定的.

在管形邻域 $O(\{u_0, \mu\}, \delta_0)$ 内, 存在常数 $C_0 > 0$, 记 $u_n(t) = P_1[\alpha(\tau)]^n \{u(t), \mu(t + s)\}, v_n(t) = P_1[\alpha(\tau)]^n \{v(t), \beta(t + s)\} (n = 0, 1, 2, \dots, [\frac{T}{\tau}])$, 当 $\tau \leq \tau_0$ 时, 有:

$$\|P_1 \alpha(\tau) \{u_n(t), \mu(t + n\tau + s)\} - P_1 \alpha(\tau) \{v_n(t), \beta(t + n\tau + s)\}\|_{\Omega} \leq (1 + C_0 \tau) \|u_n(t) - v_n(t)\|_{\Omega} \quad (8)$$

则称差分格式(4)在 S 上满足 Von Neumann 条件.

称差分格式(4)在 $S \subset H^0$ 上是收敛的.设初边值问题在 S 上可解, $\forall \{u_0, \mu(t)\} \in S$, 设相应解为 $u(t) (0 \leq t \leq T)$, $\forall t_1 \geq 0$, 记 $U(t_1 + n\tau)$ 是以 $\{u(t_1), \mu(t_1 + s)\}$ 为初边值条件的差分解.如果对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使趋于0的 $\{\tau_j\}$ 及 $\{n_j\}$ 满足 $0 < \tau_j < \delta, |t - t_1 - n_j \tau_j| < \delta$ 时, 有

$$\|U(t_1 + n_j \tau_j) - u(t)\|_{\Omega} < \varepsilon \quad (9)$$

2 定理和证明

设 $\forall S \subset H^0$, 初边值问题在 S 上可解.则 $\forall \{u_0, \mu(t)\} \in S$, 存在确定解 $u(t) \in [L_2(\Omega)]^p$, 由此建立了 $\{u_0, \mu(t)\}$ 与 $u(t)$ 之间的对应关系: $u(t) = P_1 E(t) \{u_0, \mu(s)\}$, S 是参变数 $(0 \leq s \leq T)$, 引入反投影算子 $E(t)$ 如下: $\{u(t), \mu(t + s)\} = E(t) \{u_0, \mu(s)\}$, 其中 $\mu(t + s) = P_2 E(t) \{u_0, \mu(s)\}$. 称 $E(t): S \rightarrow H^0$ 为解算子.解算子 $E(t)$ 具有性质 (a) $E(0) = I$ (b) $E(s + t) = E(s)E(t) (s, t \geq 0)$.

引理1 $\forall S \subset H^0$, 初边值问题在 S 上可解, 则初边值问题在 S 上适定的充要条件是解算子 $E(t)$ 在 S 上关于 t 一致地等度连续.

定理1 $\forall S \subset H^0$, 设存在稠密子集 $G \subset S$, 初边值问题在 G 上古典可解.若在 G 上适定, 则可解函数集可延拓到 S 上, 且在 S 上适定.

引理2 $\forall S \subset H^0$, 初边值问题在 S 上可解, 则相容条件(6)与条件(10)等价.

$$\|(E(\tau) - \alpha(\tau)) \{u(t), \mu(t + s)\}\| < \varepsilon \quad (10)$$

证 因为 $P_2(E(\tau) - \alpha(\tau)) \{u(t), \mu(t + s)\} = \mu(t + \tau + s) - \mu(t + \tau + s) = 0$, 所以

$$\|(E(\tau) - \alpha(\tau)) \{u(t), \mu(t + s)\}\| = \|P_2(E(\tau) - \alpha(\tau)) \{u(t), \mu(t + s)\}\|_{\Omega} +$$

$$\|P_2(E(\tau) - \alpha(\tau)) \{u(t), \mu(t + s)\}\|_{\partial\Omega} = \|u(t + \tau) - P_1 \alpha(\tau) \{u(t), \mu(t + s)\}\|_{\Omega}$$

证毕.

引理 3 $\forall S \subset H^0$, 初边值问题在 S 上可解, 差分格式 (4) 在 S 上稳定且满足相容条件, 设 $\forall \{u_0, \mu\} \in S$, 记 $u(t) = P_1 E(t) \{u_0, \mu(s)\}$, $U(t_1 + n\tau)$ 是以 $\{u(t_1), \mu(t_1 + s)\}$ 为初边值条件的差分解, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $\tau < \delta$ 时, 在 $t = t_1 + n\tau$ 上的差分解有如下估计式: $\|U(t) - u(t)\|_{\Omega} \leq \varepsilon K_0 T$.

证 因为

$$\begin{aligned} \{U(t_1 + n\tau) - u(t_1 + n\tau)\} &= \{U(t_1 + n\tau), \mu(t_1 + n\tau + s)\} - \\ &\quad \{u(t_1 + n\tau), \mu(t_1 + n\tau + s)\} = [\alpha(\tau)]^n \{u(t_1), \mu(t_1 + s)\} - E(n\tau) \{u(t_1), \mu(t_1 + s)\} = \\ &\quad \sum_{k=0}^{n-1} ([\alpha(\tau)]^{k+1} E((n-k-1)\tau) \{u(t_1), \mu(t_1 + s)\} - [\alpha(\tau)]^k E((n-k)\tau) \{u(t_1), \mu(t_1 + s)\}) = \\ &\quad \sum_{k=0}^{n-1} ([\alpha(\tau)]^k \alpha(\tau) E((n-k-1)\tau) \{u(t_1), \mu(t_1 + s)\} - [\alpha(\tau)]^k E(\tau) E((n-k-1)\tau) \{u(t_1), \mu(t_1 + s)\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \|U(t) - u(t)\|_{\Omega} &= \|\{U(t_1 + n\tau) - u(t_1 + n\tau)\}\|_{\Omega} \leq \\ &\quad \sum_{k=0}^{n-1} \|[\alpha(\tau)]^k (\alpha(\tau) \{u(t_1 + (n-k-1)\tau), \mu(t_1 + (n-k-1)\tau + s)\} - \\ &\quad [\alpha(\tau)]^k (E(\tau) \{u(t_1 + (n-k-1)\tau), \mu(t_1 + (n-k-1)\tau + s)\})\|_{\Omega} \leq \\ &\quad \sum_{k=0}^{n-1} K_0 \|(\alpha(\tau) \{u(t_1 + (n-k-1)\tau), \mu(t_1 + (n-k-1)\tau + s)\} - \\ &\quad E(\tau) \{u(t_1 + (n-k-1)\tau), \mu(t_1 + (n-k-1)\tau + s)\})\|_{\Omega} \leq \sum_{k=0}^{n-1} K_0 \varepsilon \tau = K_0 \varepsilon n\tau \leq \varepsilon K_0 T \end{aligned}$$

证毕.

引理 4 $\forall G \subset H^0$, 若初边值问题在 G 上古典可解, $\forall \{u_0, \mu\} \in G$, 记 $u(t) = P_1 E(t) \{u_0, \mu(s)\}$, 则关于 t 一致地有 $\lim_{\tau \rightarrow 0} (u(t + \tau) - u(t)) = 0$.

证 因为

$$\|u(t + \tau) - u(t)\|_{\Omega} \leq |\tau| \left\| \frac{u(t + \tau) - u(t)}{\tau} - L\left(x, \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) u(t) \right\|_{\Omega} + |\tau| \left\| L\left(x, \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) u(t) \right\|_{\Omega}$$

据古典解的定义式 (5), $\|u(t + \tau) - u(t)\|_{\Omega} \rightarrow 0 (\tau \rightarrow 0)$, 由 $[0, T]$ 的紧性, 这个收敛是一致的. 证毕.

定理 2 $\forall S \subset H^0$, 若初边值问题在 S 上可解且适定, 又若差分格式 (4) 在 S 上相容和稳定, 则差分格式 (4) 在 S 上收敛.

证 $\forall \{u_0, \mu\} \in S$, $u(t) = P_1 E(t) \{u_0, \mu(s)\}$. 若 $u(t)$ 是古典解, 对时步长 $\tau_j \rightarrow 0$, $n_j = \left\lfloor \frac{t - t_1}{\tau_j} \right\rfloor$, 则当 $j \rightarrow \infty$ 时, $t_1 + n_j \tau_j \rightarrow t$, 为书写方便起见, 以下不妨设 $n_j = n$, $\tau_j = \tau$. $\forall \varepsilon > 0$, 据引理 3, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $\tau < \delta_1$ 时, $\|U(t_1 + n\tau) - u(t_1 + n\tau)\|_{\Omega} < \frac{\varepsilon}{2}$, 又据引理 4, $\|u(t_1 + n\tau) - u(t)\|_{\Omega} \rightarrow 0 (t_1 + n\tau - t \rightarrow 0)$, 故 $\exists \delta_2 > 0$, 当 $|t_1 + n\tau - t| < \delta_2$ 时, $\|u(t_1 + n\tau) - u(t)\|_{\Omega} < \frac{\varepsilon}{2}$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (δ 与 t 无关), 当 $|t_1 + n\tau - t| < \delta$ 时, 有 $\|U(t_1 + n\tau) - u(t)\|_{\Omega} < \varepsilon$, 即收敛.

若 $u(t)$ 是广义解, 则存在古典解序列 $u_i(t) = P_1 E(t) \{u_i(0), \mu_i(s)\}$, 当 $\{u_i(0), \mu_i(s)\} \rightarrow \{u_0, \mu(s)\}$ 时, 关于 t 一致地有 $u_i(t) \rightarrow u(t)$. $\forall \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \|U(t_1 + n\tau) - u(t)\|_{\Omega} &\leq \|P[\alpha(\tau)]^n \{u(t_1), \mu(t_1 + s)\} - P[\alpha(\tau)]^n \{u_i(t_1), \mu_i(t_1 + s)\}\|_{\Omega} + \\ &\quad \|P[\alpha(\tau)]^n \{u_i(t_1), \mu_i(t_1 + s)\} - u_i(t)\|_{\Omega} + \|u_i(t) - u(t)\|_{\Omega} \\ u_i(t) \text{ 关于 } t \text{ 一致地趋于 } u(t) \text{ 即第 3 项 } \|u_i(t) - u(t)\|_{\Omega} &\rightarrow 0 (\text{关于 } t \text{ 一致}) \text{ 取 } i \text{ 充分大, 使 } \|u_i(t) - u(t)\|_{\Omega} < \varepsilon \\ \text{和 } \|\mu_i(0) - \mu(0)\|_{\partial\Omega^0} < \varepsilon, \text{ 且不妨设 } 2\varepsilon < \delta_0, \text{ 即使 } \{u_i(t_1), \mu_i(t_1 + s)\} &\in \text{管形邻域 } O(\{u_0, \mu\}, \delta_0) \text{ 内, 在} \\ O(\{u_0, \mu\}, \delta_0) \text{ 内, 据稳定定义, 第 1 项} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|P[\alpha(\tau)]^n \{u(t_1), \mu(t_1 + s)\} - P[\alpha(\tau)]^n \{u_i(t_1), \mu_i(t_1 + s)\}\|_{\Omega} &\leq \\ \|[\alpha(\tau)]^n \{u(t_1), \mu(t_1 + s)\} - [\alpha(\tau)]^n \{u_i(t_1), \mu_i(t_1 + s)\}\|_{\Omega} &\leq K_0 \|\{u(t_1), \mu(t_1 + s)\} - \\ \{u_i(t_1), \mu_i(t_1 + s)\}\|_{\Omega} &\leq K_0 \|u(t_1) - u_i(t_1)\|_{\Omega} + K_0 \|\mu(0) - \mu_i(0)\|_{\partial\Omega^0} < 2K_0 \varepsilon \end{aligned}$$

又 $u_i(t)$ 是古典解,收敛,对固定 i ,取 $\delta > 0$,当 $|t_1 + n\tau - t| < \delta$ 时, $\|P_1[C(\tau)]^n\{u_i(t_1), \mu_i(t_1 + s)\} - u_i(t)\|_{\Omega} < \varepsilon$,所以, $\|U(t_1 + n\tau) - u(t)\|_{\Omega} < 2(K_0 + 1)\varepsilon$,又以上各步都与 t 无关,故 $U(t_1 + n\tau)$ 一致地收敛于 $u(t)$. 证毕.

引理 5 $\forall S \subset H^0$,若初边值问题在 S 上可解,又差分格式(4)满足 Von Neumann 条件,则差分格式(4)在 S 上稳定.

证 $\forall \{u_0, \mu\} \in S$,由于差分格式(4)满足 Von Neumann 条件式(8),故 $\exists C_0 > 0, \forall \{u(t), \beta(t)\}$,

$$\|P_1[\alpha(\tau)X(u(t), \mu(t+s)) - P_1[\alpha(\tau)X(u(t), \beta(t+s))]\|_{\Omega} \leq (1 + C_0\tau) \|P_1\{u(t), \mu(t+s)\} - P_1\{u(t), \beta(t+s)\}\|_{\Omega}$$

而 $\|P_2[\alpha(\tau)X(u(t), \mu(t+s)) - P_2[\alpha(\tau)X(u(t), \beta(t+s))]\|_{\partial\Omega^{t+\tau}} = \|\mu(t+\tau) - \beta(t+\tau)\|_{\partial\Omega^{t+\tau}} \leq \|\mu(t) - \beta(t)\|_{\partial\Omega^t} \leq (1 + C_0\tau) \|P_2\{u(t), \mu(t+s)\} - P_2\{u(t), \beta(t+s)\}\|_{\partial\Omega^t}$

所以 $\|\alpha(\tau)X(u(t), \mu(t+s)) - \alpha(\tau)X(u(t), \beta(t+s))\| \leq (1 + C_0\tau) \|\{u(t), \mu(t+s)\} - \{u(t), \beta(t+s)\}\|$ 据归纳法,得

$$\begin{aligned} \|[\alpha(\tau)]^n \{u(t), \mu(t+s)\} - [\alpha(\tau)]^n \{u(t), \beta(t+s)\} \| &\leq \\ (1 + C_0\tau)^n \|\{u(t), \mu(t+s)\} - \{u(t), \beta(t+s)\}\| &= \\ (1 + C_0\tau)^n = \exp(n \ln(1 + C_0\tau)) \leq \exp(C_0n\tau) \leq \exp(C_0T) \end{aligned}$$

取 $K_0 = \exp(C_0T)$,所以稳定. 证毕.

定理 3 $\forall S \subset H^0$,若初边值问题在 S 上可解且适定,又差分格式(4)在 S 上相容和满足 Von Neumann 条件,则差分格式(4)在 S 上收敛.

证 据引理 5 和定理 2,得差分格式在 S 上收敛. 证毕.

参考文献:

- [1] 胡庆云. 非线性发展方程初值问题差分法的收敛判定[J]. 河海大学学报, 1993, 21(3): 53-58.
- [2] 胡庆云. Lax 等价定理在非线性的推广[J]. 应用数学, 2002, 15(1): 62-67.
- [3] MORTON K W, MAYERS D F. 偏微分方程数值解[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2006: 121-151.
- [4] 徐长发, 李红. 偏微分方程数值解法[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2000: 2-48.
- [5] 黄明游. 发展方程数值计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 117-143.
- [6] BRAMBLE J, STETTER H J. Stability of nonlinear discretization algorithms[C]//In Numerical Solutions of Partial Differential Equations. New York: Academic Press, 1966: 113-123.

Convergence of difference method for initial boundary value problem of a kind of evolution equation

HU Qing-yun

(College of Sciences, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: A study was made on the relationship between the stability and convergence when the difference method was used to solve the initial boundary value problem of the autonomous evolution equation. The difference schema of the initial boundary value problem was converted to the step-by-step form, which was similar to the difference schema of the initial value problem. It is concluded that the difference schema satisfying the Von Neumann condition is a stable schema, and that, under the consistency condition, such stable schema is convergent. Moreover, with error estimate expression for the difference approximation to the classical solution, the linearity condition is unnecessary.

Key words: evolution equation; initial boundary problem; nonlinearity; stability; convergence; Von Neumann condition