

# 基于三次样条函数的马斯京根参数估计方法

黄振平 ,顾巍巍 ,葛 慧 ,卢 艳

( 河海大学水文水资源学院 ,江苏 南京 210098 )

**摘要** :首先利用三次样条插值函数拟合河道上游断面入流和下游断面出流过程 ,然后应用最小二乘原理进行马斯京根流量演算系数的最优估计 .这种数学估计方法克服了传统试错法人为因素的不确定性 ,也提高了单纯使用最小二乘法估计流量演算系数的精度 ,并且为下游断面出流过程提供了不同时间步长的出流信息 .该方法具有确定模型流量演算系数速度快、精度高和求解唯一性等特点 ,在实际河道流量演算中取得了较好的应用效果 .

**关键词** :河道洪水演算 ;参数估计 ;马斯京根法 ;样条插值 ;最小二乘估计

**中图分类号** :P338      **文献标识码** :A      **文章编号** :1000-1980( 2008 )01-0011-03

常见的马斯京根流量演算系数确定方法有人工试错法和最小二乘法等 .传统的人工试错法 ,参数估计好坏的评判标准因人而异 ,最小二乘法虽然避免了试错法人为因素的不确定性 ,并具有参数确定唯一性的特点 ,但当时间步长较大时 ,马斯京根方程组差分求解过程中以直线来代替实际流量过程必然存在着一定的误差 .

本文首先利用三次样条函数拟合河道上游断面入流和下游断面出流过程 ,然后应用最小二乘原理进行马斯京根流量演算系数的最优估计 .该方法消除了人为因素的不确定性 ,改善了单纯使用最小二乘法估计流量演算系数的精度 ,为下游断面出流过程提供了不同时段步长的出流信息 .

## 1 马斯京根法的基本原理

在忽略惯性项的前提下 ,动力方程可简化为槽蓄方程 .槽蓄方程反映了流量对槽蓄量的影响 .马斯京根法就是以槽蓄方程代替复杂的动力方程、以水量平衡方程代替连续方程 ,极大地简化了计算过程<sup>[1]</sup> .其基本方程为

$$\frac{dW}{dt} = I - Q \quad W = K[ xI + ( 1 - x )Q ] = KQ' \tag{1}$$

式中 : $W$ ——槽蓄量 ; $t$ ——时间 ; $I$ 、 $Q$ ——河段的入流量、出流量 ; $Q'$ ——示储流量 , $Q' = xI + ( 1 - x )Q$  ; $K$ ——槽蓄系数 ; $x$ ——流量比重系数 .对方程组( 1)进行差分求解 ,得

$$Q_2 = C_0 I_2 + C_1 I_1 + C_2 Q_1 \tag{2}$$

其中

$$C_0 = \frac{0.5\Delta t - Kx}{0.5\Delta t + K - Kx} \quad C_1 = \frac{0.5\Delta t + Kx}{0.5\Delta t + K - Kx} \quad C_2 = \frac{-0.5\Delta t + K - Kx}{0.5\Delta t + K - Kx}$$

式中 : $I$ 、 $Q$  的下标“1”和“2”——时段初和时段末 ; $C_0$ 、 $C_1$  和  $C_2$ ——流量演算系数 ; $\Delta t$ ——演算时段长 .

显然 ,对于一个河段 ,只要确定参数  $K$ 、 $x$  及选定演算时段  $\Delta t$  后 ,就可以求出流量演算系数  $C_0$ 、 $C_1$  和  $C_2$  .根据上断面流量过程  $I$  及下断面起始流量计算出下断面的流量过程  $Q$  .马斯京根流量演算系数的确定方法有很多 ,如人工试错法<sup>[2]</sup>、最小二乘法<sup>[3-4]</sup>、遗传算法<sup>[5]</sup>、蚁群算法<sup>[6]</sup>和数值积分法<sup>[7]</sup>等 ,其中最常用的方法为人工试错法和最小二乘法 .

## 2 基于三次样条插值的马斯京根法

在对马斯京根方程组进行差分求解的过程中 ,假定流量在计算时段  $\Delta t$  内呈线性变化 , $\Delta W$  的计算公式为

收稿日期 2006-12-04  
作者简介 :黄振平( 1949— ) ,男 ,江苏南通人 ,教授 ,博士生导师 ,主要从事工程水文及随机水文研究 .

$$\Delta W = \frac{I_1 + I_2}{2} \Delta t - \frac{Q_1 + Q_2}{2} \Delta t \tag{3}$$

由于  $\Delta t$  一般为几小时,有时甚至十几小时,当时段较大时,以直线来代替实际流量过程必然存在着一  
定的误差.

三次样条函数是函数逼近的一种方法.已知平面上有  $n$  个点  $(x_i, y_i)$  其中  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  这些点称为  
样本点.如果有某函数  $S(x)$  满足以下 3 个条件,则称  $S(x)$  为经过这  $n$  个点的三次样条函数.

a.  $S(x_i) = y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 亦即该函数经过这些样本点;

b.  $S(x)$  在每个子区间  $[x_i, x_{i+1}]$  上为三次多项式

$$S(x) = c_{i1}(x - x_i) + c_{i2}(x - x_i)^2 + c_{i3}(x - x_i)^3 + c_{i4}$$

c.  $S(x)$  在整个区间  $[x_1, x_n]$  上有连续的一阶及三阶导数.

对于  $n$  个实测断面流量资料  $I$  与  $Q$ , 同样可建立三次样条函数, 即

$$I = a_{i1}(t - t_i) + a_{i2}(t - t_i)^2 + a_{i3}(t - t_i)^3 + a_{i4} \tag{4}$$

$$Q = b_{i1}(t - t_i) + b_{i2}(t - t_i)^2 + b_{i3}(t - t_i)^3 + b_{i4} \tag{5}$$

式中的多项式系数可以由 MATLAB 样条插值工具箱提供的 `csap()` 函数来确定<sup>[8]</sup>.

有了河道断面入流与出流过程函数的显式表达式, 就可以计算出任意时刻的入流量与出流量. 在马斯京  
根河道流量演算过程中, 一般以实测资料系列的等时间  $\Delta t$  为计算步长, 这里可以以任意等时间  $h$  ( $h \leq \Delta t$  且  
 $\Delta t$  为  $h$  的整数倍) 为计算步长, 得到  $h$  时间步长的入流量与相应的出流量.

因为马斯京根法的流量演算系数满足  $C_0 + C_1 + C_2 = 1$ , 所以  $C_2 = 1 - C_0 - C_1$ , 代入式(2), 得

$$Q_2 - Q_1 = C_0(I_2 - Q_1) + C_1(I_1 - Q_1) \tag{6}$$

对于  $\frac{n\Delta t}{h}$  个以  $h$  为时间步长的入流和出流系列, 式(6)可写成

$$\begin{cases} Q_1 - Q_0 = C_0(I_1 - Q_0) + C_1(I_0 - Q_0) \\ Q_2 - Q_1 = C_0(I_2 - Q_1) + C_1(I_1 - Q_1) \\ Q_{\frac{n\Delta t}{h}} - Q_{\frac{n\Delta t}{h}-1} = C_0(I_{\frac{n\Delta t}{h}} - Q_{\frac{n\Delta t}{h}-1}) + C_1(I_{\frac{n\Delta t}{h}-1} - Q_{\frac{n\Delta t}{h}-1}) \end{cases} \tag{7}$$

此时  $I, Q$  的下标表示先后时序.

将式(7)写成矩阵形式, 即

$$Y = XC \tag{8}$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} Q_1 - Q_0 \\ Q_2 - Q_1 \\ Q_{\frac{n\Delta t}{h}} - Q_{\frac{n\Delta t}{h}-1} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} I_1 - Q_0 & I_0 - Q_0 \\ I_2 - Q_1 & I_1 - Q_1 \\ I_{\frac{n\Delta t}{h}} - Q_{\frac{n\Delta t}{h}-1} & I_{\frac{n\Delta t}{h}-1} - Q_{\frac{n\Delta t}{h}-1} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix}$$

根据最小二乘原理, 流量演算系数向量  $C$  的最优估计为

$$C = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{9}$$

根据上下游的实测流量资料, 构造矩阵  $X$  与  $Y$ , 进而求得系数向量  $C$ , 当得到  $C_0$  与  $C_1$  后,  $C_2 = 1 - C_0 - C_1$ . 由此可得下游断面以  $h$  为步长的出流过程  $Q(t)$ .

### 3 算 例

以海河流域南运河称钩湾至临清段(河段长 83.8 km, 中间支流影响不显著)1961 年的一次洪水过程的流  
量演算为例, 运用基于三次样条插值的马斯京根法(方法 3)进行模型的流量演算系数估计与精度评定分析,  
并与试错法(方法 1)、最小二乘估计法(方法 2)和基于线性插值的马斯京根法(方法 4, 节点内的函数值用线  
性插值方法求得, 再用最小二乘法估计马斯京根的流量演算系数)的计算结果作一比较.

以方法 1 进行流量演算系数估计, 得估计值  $C_0 = 0.4116, C_1 = 0.1057, C_2 = 0.4827$ , 进而可得  $K = 13.65$ ,

$x = -0.26$  ,其中  $\Delta t = 12\text{ h}$  ;以方法 2 进行流量演算系数的最优估计 ,得估计值  $C_0 = 0.4224$  ,  $C_1 = 0.1086$  ,  $C_2 = 0.4690$  ,反推求得  $K = 13.054$  ,  $x = -0.272$  ,其中  $\Delta t = 12\text{ h}$  ;在方法 3 中 ,首先运用 MATLAB 样条插值工具箱提供的 `csap()` 函数分别确定该河道断面入流与出流过程函数的显式表达式 ,计算多项式系数  $a_{ij}$  和  $b_{ij}$  (  $i = 1, 2, \dots, n$  ;  $j = 1, 2, 3, 4$  ) 的值 ,再分别取步长  $h = 1\text{ h}, 2\text{ h}, 3\text{ h}, 4\text{ h}, 6\text{ h}, 12\text{ h}$  进行计算 ;在方法 4 中 ,分别取步长  $h = 1\text{ h}, 2\text{ h}, 3\text{ h}, 4\text{ h}, 6\text{ h}, 12\text{ h}$  进行计算 .模型精度评定分析如表 1 所示 .

4 结 语

基于三次样条插值的马斯京根法克服了传统试错法人为因素的不确定性 ,该方法具有确定模型流量演算系数速度快、精度高和求解唯一性等特点 ,可为下游断面出流过程提供不同时间步长的出流信息 ,为防洪决策提供更为详细的依据 .从表 1 可以看出 ,当步长  $h < \Delta t = 12\text{ h}$  时 ,方法 3 和方法 4 的模型精度的评价指标都优于  $\Delta t = 12\text{ h}$  时的评价指标 ,改善了单纯使用最小二乘法估计流量演算系数的计算精度 ,步长  $h$  越小 ,模型计算的精度就越高 .此外 ,以方法 3 计算所得的结果与方法 4 相比较 ,计算精度也有所提高 ( 由于本次所选洪水过程比较平缓 ,精度提高的幅度有限 ) .在实际河道流量演算应用中 ,可选择多次洪水过程 ,运用方法 3 分析各次洪水过程的  $C_0$  ,  $C_1$  和  $C_2$  ,然后再进行综合分析 ,最终确定该河道的流量演算系数 .

参考文献 :

[ 1 ] 芮孝芳 .水文学原理 [ M ] .北京 :中国水利水电出版社 ,2004 :220-230 .  
[ 2 ] 长江流域规划办公室 .水文预报方法 [ M ] .北京 :水利出版社 ,1982 .  
[ 3 ] 何惠 ,张建云 .马斯京根法参数的一种数学估计方法 [ J ] .水文 ,1998 ( 5 ) :14-17 .  
[ 4 ] 翟国静 .马斯京根模型参数估计方法探讨 [ J ] .水文 ,1997 ( 3 ) :40-42 .  
[ 5 ] 陆桂华 ,郦建强 ,杨晓华 .遗传算法在马斯京根模型参数估计中的应用 [ J ] .河海大学学报 :自然科学版 ,2001 ,29 ( 4 ) :9-12 ;  
[ 6 ] 詹士昌 ,徐婕 .蚁群算法在马斯京根模型参数估计中的应用 [ J ] .自然灾害学报 ,2005 ,14 ( 5 ) :20-24 ;  
[ 7 ] 陆 皎 .马斯京根法的龙格-库塔数值积分解 [ J ] .水文 ,1987 ( 2 ) :19-22 .  
[ 8 ] 薛定宇 ,陈阳泉 .高等应用数学问题的 MATLAB 求解 [ M ] .北京 :清华大学出版社 ,2005 :271-275 .

Muskingum parameter estimation method based on cubic spline function

HUANG Zhen-ping , GU Wei-wei , GE Hui , LU Yan

( College of Hydrology and Water Resources , Hohai University , Nanjing 210098 , China )

**Abstract** :The inflow of upstream cross-section and outflow of downstream cross-section of river channels were fitted by use of the cubic spline function , then the optimum Muskingum streamflow routing parameter was estimated by the least square method . The mathematic method overcomes the defect of man-made uncertainties of the conventional trial and error procedure , improves the estimation accuracy of streamflow routing parameters alone with the least square method , and also provides outflow information with different time intervals for downstream cross-section . The method is characterized by high speed , high accuracy , and uniqueness of the solution for determination of streamflow routing parameters , and good results have been achieved in streamflow routing for real river channels .

**Key words** :flood routing for river channel ; parameter estimation ; Muskingum method ; spline interpolation ; least square estimation

表 1 各方法精度评定分析

| Table 1 Accuracy assessment of each method |              |          |               |         |
|--------------------------------------------|--------------|----------|---------------|---------|
| 方法                                         | $\Delta t/h$ | 评价指标     |               |         |
|                                            |              | 洪峰相对误差/% | 相对误差绝对值的平均值/% | 确定性系数/% |
| 1                                          | 12           | 0.17     | 0.96          | 99.76   |
| 2                                          | 12           | 0.20     | 0.95          | 99.87   |
| 3                                          | 1            | 0.00     | 0.15          | 99.99   |
| 4                                          | 1            | 0.05     | 0.16          | 99.99   |
| 3                                          | 2            | 0.02     | 0.29          | 99.99   |
| 4                                          | 2            | 0.10     | 0.30          | 99.99   |
| 3                                          | 3            | 0.05     | 0.41          | 99.98   |
| 4                                          | 3            | 0.13     | 0.43          | 99.97   |
| 3                                          | 4            | 0.07     | 0.52          | 99.97   |
| 4                                          | 4            | 0.17     | 0.53          | 99.96   |
| 3                                          | 6            | 0.12     | 0.69          | 99.94   |
| 4                                          | 6            | 0.22     | 0.69          | 99.93   |
| 3,4                                        | 12           | 0.20     | 0.95          | 99.87   |