

一种新的灰关联系数表达式

杨文慧^{1 2}, 吴建华¹

(1.河海大学水利水电工程学院,江苏 南京 210098 ;2.太原理工大学水利学院,山西 太原 030024)

摘要 :在对灰关联分析法原理分析的基础上 ,提出了一种新的灰关联系数表达式 .与传统的灰关联系数表达式和两种改进的灰关联系数表达式进行了比较 ,说明新的灰关联系数表达式在理论上是可行的 .实例应用表明 ,基于新的灰关联系数表达式的灰关联分析方法用于水质评价 ,可以给出较为符合实际的评价结果 .

关键词 :灰关联分析法 ;灰关联系数 ;水质评价

中图分类号 :TB115 ;X824 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2008)01-0040-04

灰关联分析法是一种多因素统计分析方法 ,是以各因素的样本数据为依据 ,根据因素之间发展态势的相似或相异程度衡量因素间的接近程度 .相对于传统的回归分析、主成分分析等方法 ,灰关联分析法具有对样本要求低、计算量小等优点 ,因此在环境质量评价、水质评价、经济评价等许多方面获得了广泛应用^[1-5] .但传统的灰关联分析法在具体应用中还存在着关联评价趋于均匀化 ,分辨系数取值影响结果排序等不足 ,基本反映在灰关联系数表达式上^[6] .针对以上问题 ,一些研究提出了改进方法 ,一种是对灰关联系数表达式的改进 ,一种是对关联度计算式的改进^[5,7-8] .所谓的关联度计算式是关联度和灰关联系数计算的一个综合表达式 .水乃翔等^[9-11]的研究证明了现有的关联度计算式 ,如一般关联度、绝对关联度、斜率关联度、B 型关联度、改进关联度等不满足保序性这一基本要求 ,在理论上还有待于进一步的完善 .而针对灰关联系数改进式的研究相对较少 .本文将在灰关联分析理论上 ,构建一种新的灰关联系数表达式 ,通过与两种改进的灰关联系数表达式的比较和实例应用 ,分析基于新的灰关联系数表达式的灰关联分析方法(以下简称本文方法)的合理性 .

1 新的灰关联系数表达式的提出

设无量纲化后的参考数列和比较数列分别为 $X_0(k) = \{x_0(k)\}$, $X_i(k) = \{x_i(k)\}$,其中 $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, N$.传统的灰关联系数采用以下的表达式^[12] :

$$\xi_i(k) = \frac{\min_i \min_k \Delta_i(k) + \rho \max_i \max_k \Delta_i(k)}{\Delta_i(k) + \rho \max_i \max_k \Delta_i(k)} \tag{1}$$

式中 : ρ ——分辨系数 , $\rho \in [0, 1]$; $\Delta_i(k)$ ——比较数列中第 i 个样本的第 k 个指标 $x_i(k)$ 与参考数列相应指标 $x_0(k)$ 的绝对差 ,由式(2)确定 :

$$\Delta_i(k) = |x_0(k) - x_i(k)| \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, N) \tag{2}$$

相应的关联度计算采用

$$r_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_i(k) \tag{3}$$

式中 r_i 表示第 i 个样本的评判结果 . r_i 越大 ,表示比较数列 $X_i(k)$ 与参考数列 $X_0(k)$ 越相似 .

针对传统方法的不足^[6] ,本文在灰关联分析理论上构建如下形式的灰关联系数表达式 :

$$\xi_i(k) = \frac{\alpha}{\Delta_{\max}}(1 - \Delta_i(k)) = \frac{\alpha}{\max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)|}(1 - |x_0(k) - x_i(k)|) \tag{4}$$

式中： α ——分辨系数， $\alpha \in (0, 1]$ ， α 值的大小影响结果的分辨率。式(4)在 $\Delta_i(k)$ 和 $\xi_i(k)$ 之间建立了一种线性关系。 $\xi_i(k)$ 的值域范围在 0~1 之间，值域范围越大，理论上意味着分辨率越高。当 $\alpha = 1$ 时， $\xi_i(k)$ 的值域范围最大。在对参考数列和比较数列采用区间值化的无量纲处理方法时，总能得到 $\max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)| = 1$ 。将这些条件代入式(4)可得到

$$\xi_i(k) = 1 - \Delta_i(k)$$

(5)

相应的关联度计算采用

$$r_i = \sum_{k=1}^N w_i(k) \xi_i(k)$$

(6)

式中 $w_i(k)$ 表示第 k 个指标的权重值。

灰关联分析的实质是整体比较，是有参考系的、有测度的比较^[12]。在改进的方法中，参考数列构成灰关联分析法的参考系，式(4)和式(6)完成了灰关联分析中的整体比较和有测度的比较。因此，本文方法符合灰关联分析法的理论。

2 灰关联系数表达式的比较

2.1 与传统灰关联系数表达式的比较

改进的灰关联系数表达式(式(4))和式(1)的分布特征比较见图 1。两者的不同主要体现在以下 2 个方面：

a. $\xi_i(k)$ 变换对分辨率和关联序的影响。由图 1 可见，对于式(1)，在 $\Delta_i(k)$ 和 $\xi_i(k)$ 之间建立的是非线性关系， $\xi_i(k)$ 变换影响结果的分辨率和关联序。 $\xi_i(k)$ 分布曲线在 $\Delta_i(k)$ 取值较小的范围内曲线变化较大，在 $\Delta_i(k)$ 取值较大的范围内曲线变化较平缓，说明经过式(1)的变换后，不同的 $\Delta_i(k)$ 转换到 $\xi_i(k)$ 增加的倍数不同， $\xi_i(k)$ 值对 $\Delta_i(k)$ 的计算结果起了均化作用，会降低计算结果的分辨率。另外，由于是非线性关系，不同的 $\Delta_i(k)$ 转换到 $\xi_i(k)$ 增加的倍数不同，可能产生序数效应。而对于式(4)，在 $\Delta_i(k)$ 和 $\xi_i(k)$ 之间建立的是一种线性关系，线性关系的优点在于 $\xi_i(k)$ 将不会改变不同样本同一指标的绝对差之间的比值关系，因此能保证关联度计算结果的一致性。由于是线性关系， $\xi_i(k)$ 对 $\Delta_i(k)$ 不存在均化作用，不影响结果的分辨率。

b. 分辨系数对关联序的影响。对于式(1)，随 ρ 取值的不同，不同的 $\Delta_i(k)$ 转换到 $\xi_i(k)$ 增加的倍数不同，因此，传统的灰关联分析法可能在 ρ 取不同的值时出现不同的关联序。对于式(4)，随 α 的变化，不同样本同一指标的绝对差之间的排序关系不变，因此， α 值不产生序数效应。

对式(1)可能产生序数效应的情况进一步举例说明：为方便起见，直接构造 $\Delta_i(k)$ ，令 $\Delta_1(k) = \{0, 0.1, 0.9, 1\}$ ； $\Delta_2(k) = \{0, 0.3, 0.4, 1\}$ ， $\rho = 0.5$ 时，由式(1)可得 $\zeta_1(k) = \{1, 0.833, 0.357, 0.333\}$ ； $\zeta_2(k) = \{1, 0.556, 0.625, 0.333\}$ ，关联度计算结果为 $r_1 > r_2$ ； $\rho = 0.9$ 时，由式(1)可得 $\zeta_1(k) = \{1, 0.9, 0.5, 0.474\}$ ； $\zeta_2(k) = \{1, 0.692, 0.75, 0.474\}$ ，关联度计算结果为 $r_1 < r_2$ 。两次计算的关联序不同。采用本文方法，对各指标取相同的权重，计算结果都为 $r_1 > r_2$ ，不改变关联序。实例中，本文方法和传统方法的不同在于灰关联系数表达式的不同，再次说明式(1)改变关联序与 $\xi_i(k)$ 的非线性计算有关。

2.2 与两种改进的灰关联系数表达式的比较

另外两种改进的灰关联系数表达式^[5,8]分别为

$$\xi_i(k) = \frac{1 - \Delta_i(k)}{1 + \Delta_i(k)}$$

(7)

$$\xi_i(k) = \frac{\min_i |x_0(k) - x_i(k)| + \rho \max_i |x_0(k) - x_i(k)|}{|x_0(k) - x_i(k)| + \rho \max_i |x_0(k) - x_i(k)|}$$

(8)

式(8)不需要对比较数列和参考数列进行无量纲化预处理。式(5)、式(7)和式(8)的灰关联系数分布特征的比较见图 2。式(7)和式(8)对 $\Delta_i(k)$ 采用的都为非线性变换式，对 $\Delta_i(k)$ 的计算都有一定的均化作用，但两式的

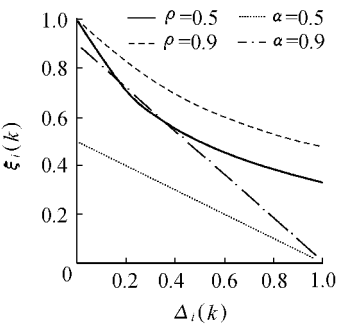


图 1 灰关联系数分布特征曲线
Fig.1 Characteristic curve of grey relation coefficients

均化程度不同.式(8)的分布曲线与图1中式(1)类似,说明式(8)对灰关联系数计算的改进不明显,仍然存在式(1)的不足.式(7)的分布曲线与式(5)比较接近,说明经过式(7)得到的 $\xi_i(k)$ 与式(5)会比较接近.由于式(5)对 $\Delta_i(k)$ 的计算不会起均化作用,因此在理论上式(5)的改进优于式(7)和式(8).

3 本文方法在水质评价中的基本步骤

a. 确定参考数列 $X_0(k)$ 和比较数列 $X_i(k)$.根据GB 3838—2002《地表水环境质量标准》,以Ⅰ类水质评价标准作为参考序列,监测资料和其他类水质标准作为比较序列,并采用区间值化的方法进行无量纲化处理.

b. 计算灰关联系数.灰关联系数采用式(5)计算.

c. 计算关联度.关联度采用式(6)计算.式中指标权重的确定采用以下方法:对于数值越大,污染越重的指标 $w'_i(k)=\frac{x_i(k)}{\bar{s}_k}$;对于数值越小,污染越重的指标 $w'_i(k)=\frac{\bar{s}_k}{x_i(k)}$.其中 $\bar{s}_k$ 为第 k 个评价因子评价标准的平均值, $\bar{s}_k=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m s_{kj}$, m 为分级标准数.对 $w'_i(k)$ 进行归一化处理,得到归一化处理后的权重

$$w_i(k)=\frac{w'_i(k)}{\sum_{k=1}^N w'_i(k)}.$$

d. 关联度大小排序.对各比较数列与参考数列的关联度从大到小排序,关联度越大,比较数列与参考数列变化的态势越一致,关系越密切.

4 实例应用

将本文方法和其他几种灰关联分析方法用于沙坪河流域^[13]水质评价,并对多种方法结果进行比较.采用式(7)时,关联度的计算采用式(6),式(1)和式(8)相应的关联度计算采用式(3).表1为沙坪河流域水质监测资料^[13].表2为地面水环境质量分级标准.以Ⅰ类水质评价标准作为参考序列,监测资料和其他类水质标准作为比较序列.

表1 沙坪河流域水质监测结果

Table 1 Water quality data of

Shaping River Basin

mg/L

断面名称	$\rho(\text{DO})$	$\rho(\text{COD}_{\text{Cr}})$	$\rho(\text{BOD}_5)$	$\rho(\text{NH}_3\text{-N})$	$\rho(\text{挥发酚})$
龙口河	4.45	23.45	2.30	0.272	0.011
桃源医院	6.10	22.45	3.15	0.313	0.025
玉桥	0.70	53.80	1.10	0.935	0.038
三夹	2.40	28.55	1.30	0.283	0.019
谷埠	1.75	33.60	1.40	0.487	0.017
沙坪水闸	1.65	28.55	1.35	0.656	0.015

表2 地面水环境质量标准

Table 2 Quality standard for

surface water environment

mg/L

水质类别	$\rho(\text{DO})$	$\rho(\text{COD}_{\text{Cr}})$	$\rho(\text{BOD}_5)$	$\rho(\text{NH}_3\text{-N})$	$\rho(\text{挥发酚})$
Ⅰ	7.5	15	2	0.15	0.002
Ⅱ	6.0	15	3	0.50	0.002
Ⅲ	5.0	20	4	1.00	0.005
Ⅳ	3.0	30	6	1.50	0.010
Ⅴ	2.0	40	10	2.00	0.100

注:表中数据引自GB 3838—2002《地表水环境质量标准》.

各水质指标的权重值分别为

$$W = \begin{bmatrix} 0.328 & 0.304 & 0.143 & 0.082 & 0.143 \\ 0.209 & 0.254 & 0.171 & 0.083 & 0.283 \\ 0.575 & 0.192 & 0.019 & 0.078 & 0.136 \\ 0.438 & 0.266 & 0.058 & 0.061 & 0.177 \\ 0.484 & 0.252 & 0.05 & 0.085 & 0.128 \\ 0.511 & 0.214 & 0.048 & 0.114 & 0.112 \end{bmatrix}$$

龙口河
桃源医院
玉桥
三夹
谷埠
沙坪水闸

在灰关联分析法的相应计算步骤中代入有关数据,并分别采用式(1)、式(5)、式(7)和式(8)等几个灰关

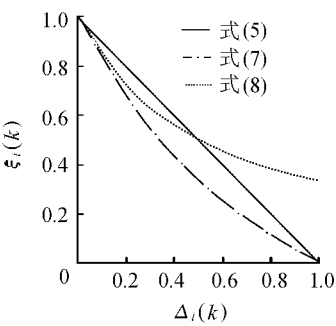


图2 3种改进的灰关联系数分布特征曲线

Fig.2 Characteristic curve of 3 improved grey relation coefficients

联系数表达式进行计算,并与文献[13]的模糊综合评价法的结果比较(表3)。式(1)和式(8)中取 $\rho = 0.5$ 。对文献[13]的模糊综合评价结果,根据评价结果矩阵,龙口河、桃源医院和三夹需采用加权平均原则分析结果,求得的结果值分别为3.12、3.35、3.99。玉桥、谷埠和沙坪水闸需要采用最大隶属度原则,得到的结果值都为Ⅴ类水。

由计算结果可以看出,本文方法、式(7)方法与模糊综合评价法的结果接近,反映在计算值上的差异较小,用于水质评价是可行的。相对于式(1)方法,本文方法可给出一个更为符合实际的评价结论;与式(7)方法比较,本文方法更接近模糊综合评价法的结果;式(8)方法与式(1)方法得到的评价结果类似,但两式相对于模糊综合评价法得到的结果差别较大,说明式(8)的改进只在于减少了指标无量纲化的烦琐,在水质评价方面,相对于式(1)对评价结果的贡献不大。综上所述,本文方法和式(7)方法较适用于水质评价,可以给出较为符合实际的评价结果,而且在计算上较模糊综合评价法更简单。

表 3 各方法评价结果比较

Table 3 Comparison of evaluation results of different methods

断面名称	水质类别评价结果				
	本文方法	式(7)方法	模糊综合评价法	式(1)方法	式(8)方法
龙口河	Ⅳ	Ⅳ	3.12	Ⅲ	Ⅲ
桃源医院	Ⅲ	Ⅳ	3.35	Ⅲ	Ⅲ
玉 桥	Ⅴ	Ⅴ	Ⅴ	Ⅳ	Ⅴ
三 夹	Ⅳ	Ⅳ	3.99	Ⅲ	Ⅳ
谷 埠	Ⅴ	Ⅴ	Ⅴ	Ⅳ	Ⅳ
沙坪水闸	Ⅴ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅳ	Ⅳ

5 结 语

在灰关联理论上,构建了一种新的灰关联系数表达式,与传统的灰关联系数表达式和两种改进的灰关联系数表达式进行了比较分析,说明新的灰关联系数表达式在理论上是可行的。采用水质资料对文中的几种灰关联分析法进行了实例验证,说明本文方法有良好的应用效果。

参考文献：

[1] 李立辉,陈杰,赵耀. 农机、经济、社会协调发展的灰关联分析[J]. 吉林农业大学学报, 1995, 17(增刊): 133-136.

[2] 周慧. 灰关联度综合评价法及在大气环境质量评价中的应用[J]. 辽宁工学院学报, 1997, 17(2): 69-72.

[3] 郭存芝,郑垂勇,陈传美. 灰关联分析法在农作物品种综合评判中的应用[J]. 河海大学学报: 自然科学版, 1999, 27(2): 96-99.

[4] 李国臣. 灰色关联理论在港口选址中的应用[J]. 河海大学学报, 1993, 21(4): 75-80.

[5] 夏军. 区域水环境质量灰关联度评价方法的研究[J]. 水文, 1995(2): 4-11.

[6] 申卯兴,薛西锋,张小水. 灰色关联分析中分辨系数的选取[J]. 空军工程大学学报, 2003, 4(1): 68-70.

[7] 肖新平. 关于灰色关联度量化模型的理论研究和评论[J]. 系统工程理论与实践, 1997(8): 76-81.

[8] 戈早川,俞慧强,周彤. 一种新的灰色关联分析法[J]. 中国卫生统计, 1999, 16(1): 50-51.

[9] 水乃翔,董太亨,沙霞. 关于灰关联度的一些理论问题[J]. 系统工程, 1992, 10(6): 23-26.

[10] 张绍良,张国良. 灰色关联度计算方法比较及其存在问题分析[J]. 系统工程, 1996(3): 45-49.

[11] 唐五湘. 灰色绝对关联度的缺陷[J]. 系统工程, 1994, 12(5): 59-62.

[12] 邓聚龙. 灰色系统理论教程[M]. 武昌: 华中科技大学出版社, 1990: 33-62.

[13] 郜慧,金辉. 模糊综合评判法在沙坪河流域水质评价中的应用[J]. 人民长江, 2006(6): 50-51, 71.

A new expression of grey relation coefficient

YANG Wen-hui^{1, 2}, WU Jian-hua¹

(1. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China ;
2. College of Hydraulic Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract Based on the principle of grey relation analysis, a new expression of grey relation coefficient was proposed. The comparison of the new expression with the conventional one and other two improved expressions shows that the present one is rational in theory. Case study shows that the present expression may provide rational result of water quality evaluation, which agrees well with the reality.

Key words grey relation analysis method; grey relation coefficient; water quality evaluation