

基于板梁扭转振动控制阻尼的压电片拓扑形状设计

胡小伟 朱灯林

(河海大学机电工程学院,江苏 常州 213022)

摘要 针对悬臂板扭转振动主动控制问题,研究了以扭转阻尼为目标的 PZT 压电片拓扑形状优化技术,给出了反馈控制阻尼系数及其灵敏度计算公式,并采用渐进结构优化设计思想对压电片的拓扑形状进行了优化设计.仿真和分析结果证明了压电片拓扑形状优化设计对抑制扭转振动的有效性.
关键词 智能结构;PZT 主动控制;压电片拓扑优化;渐进结构优化
中图分类号 O328 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2008)01-0112-05

在微电子装备的精密柔性操作结构中,采用智能主动控制方法对振动进行抑制一直受到工程界的广泛关注.在某些应用中,扭转模态控制往往是振动控制的关键.例如:直升机的螺旋桨叶片^[1],扭转振动易导致零件疲劳损坏,且维修费用很高;在 HDD 驱动臂中,驱动臂扭转振动是影响磁头动态定位精度的关键因素^[2].在压电片的主动控制中,压电片形状和布置对结构扭转模态的有效控制有着十分重要的影响.

文献 3-6 对压电片数量、大小和位置尺寸等参数进行了优化设计.例如:孙东昌等^[3]提出了一种用于振动控制的分布压电单元法,即通过将分布压电传感器和作动器分割成若干相互独立的单元的方法来设计压电模态传感器与压电模态作动器.张俊华等^[4]构造了离散分布、同位配置压电片驱动器和传感器压电耦合板的四节点矩形板单元,建立了有限元模型,并利用具有小生境技术的遗传算法对压电片的位置等参数进行了优化.古渊等^[5]针对悬臂柔性板的振动主动控制问题,应用 D 优化法对二维柔性板上的压电传感和执行器的位置优化进行了研究.目前的研究主要是针对压电片形状确定的情况(一般为长方形)对压电片位置和尺寸进行优化.由于压电片的形状在优化前就限制为长方形,优化得到的结果是在一定约束条件下的最优结果,而不是理论上的最优结果,因此对压电片的形状、位置同时进行优化将是最理想的优化.本文针对压电片的拓扑形状,将结构拓扑优化设计理论应用于智能结构 PZT 形状优化问题,并提出了一种新的压电片优化设计方法.

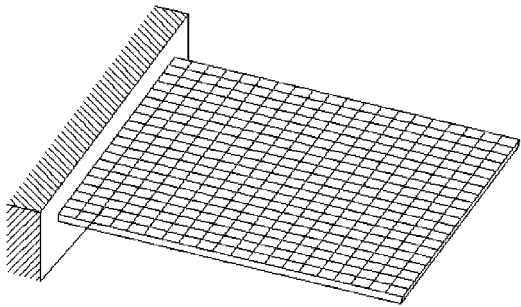


图 1 悬臂板结构

Fig.1 Structure of cantilever plate

1 压电片与悬臂板的耦合分析

压电智能悬臂板结构如图 1 所示,板的长度为 L 、宽度为 B 、厚度为 t_p ,板的上下表面对称粘贴一对压电片,压电片厚度为 t_a .

1.1 压电传感器与板梁的耦合分析

采用四节点矩形板单元(图 2)对模型进行分

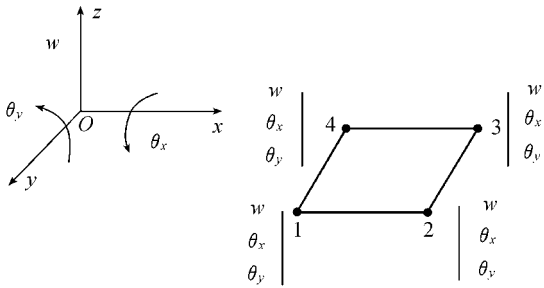


图 2 四节点 Kirchhoff 矩形板单元

Fig.2 Four-node Kirchhoff rectangular element

析,每个节点有 θ_x, θ_y, w 3 个自由度, θ_x 和 θ_y 分别为中面变形后法线绕 x 轴和 y 轴的转角, w 为板梁内任意一点的挠度. 因此,单元的节点位移变量可以表示为

$$\delta^e = (w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \dots, w_4, \theta_{x4}, \theta_{y4})^T \quad (1)$$

假设压电传感器/作动器与悬臂板表面为理想粘贴,即忽略黏结层对板梁振动的影响,同时忽略板梁内位移,则根据弹性薄板理论,板梁上压电传感器的应变可以表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_a \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ z_a \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ z_a \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + z_a \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{bmatrix} = z_a \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 $z_a = (t_a + t_p)/2$ 为压电片中面到板梁中面的距离. 利用板单元型函数 N 将单元内任意一点的挠度表示成单元节点位移形式,即 $w = N\delta^e$, 则式(2)可以写成

$$\boldsymbol{\varepsilon} = z_a \left(-\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} \right)^T \delta^e = z_a \mathbf{B} \delta^e \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = \left(-\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} \right)^T$$

压电传感器表面产生的电荷量为

$$q(t) = \int_{A_a} \mathbf{e}_3 \boldsymbol{\varepsilon} dA = \sum_{\text{elem}} \int_{A_i} z_a \mathbf{e}_3 \mathbf{B} dA \delta^e = \sum_{\text{elem}} \mathbf{K}_{rs}^e \delta^e = \mathbf{K}_{rs} \boldsymbol{\delta} \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_3 = (e_{31}, e_{31}, e_{36}) \quad \mathbf{K}_{rs}^e = \int_{A_i} z_a \mathbf{e}_3 \mathbf{B} dA \quad \mathbf{K}_{rs} = \sum_{\text{elem}} \mathbf{K}_{rs}^e$$

式中: A_a ——压电片上表面的面积; A_i ——第 i 个单元压电材料上表面的面积; e_{31}, e_{31}, e_{36} ——压电应力常数矩阵 $\mathbf{e}$ 的 3 个分量; $\mathbf{K}_{rs}^e$ ——压电传感器和板梁结构的单元耦合矩阵; $\mathbf{K}_{rs}$ ——压电传感器和板梁结构的总体耦合矩阵; $\boldsymbol{\delta}$ ——总体节点位移矩阵.

压电传感器的输出电流为电荷对时间的一阶导数:

$$I = \frac{dq}{dt} = \mathbf{K}_{rs} \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (5)$$

传感器输出电流经电荷放大器放大后,输出电压为

$$U_s = G^c \mathbf{K}_{rs} \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (6)$$

式中 G^c 为电荷放大器的放大系数.

1.2 压电作动器与板梁的耦合分析

根据第二类压电方程,

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E} \quad (7)$$

式中: $\mathbf{c}$ ——压电陶瓷的弹性刚度常数矩阵; $\mathbf{E}$ ——作动器内部电场强度. 由于振动时板梁的变形相对压电片的变形较小,忽略压电作动器与梁的耦合应变,得到压电作动器内的应力矩阵为

$$\mathbf{T} = -\mathbf{e}^T \mathbf{E} \quad (8)$$

由于压电片厚度很薄,可以近似认为压电片内的应力沿厚度方向均匀分布,则作动器产生的力矩为

$$\mathbf{M}_a = \int_{0.5t_p}^{0.5t_p + t_a} \mathbf{T} z dz = z_a t_a \mathbf{e}^T \mathbf{E} \quad (9)$$

由于压电材料极化方向垂直于板面,可只考虑 z 方向的电场强度,即 $\mathbf{E} = [0 \ 0 \ U_a/t_a]^T$, 则上式可以写成

$$\mathbf{M}_a = z_a \mathbf{e}_3^T U_a \quad (10)$$

式中 U_a 为压电作动器的输入电压. 由于压电片产生的弯矩为分布弯矩,压电片产生的等效节点载荷为

$$\mathbf{F}_a = \int_{A_a} \mathbf{B}^T z_a \mathbf{e}_3^T dA U_a = \sum_{\text{elem}} \mathbf{K}_{ra}^e U_a = \mathbf{K}_{ra} U_a \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_{ra}^e = \int_{A_a} \mathbf{B}^T \mathbf{z}_a \mathbf{e}_3^T dA \quad \mathbf{K}_{ra} = \sum_{\text{elem}} \mathbf{K}_{ra}^e$$

式中： $\mathbf{K}_{ra}^e$ ——压电作动器和板梁结构的单元耦合矩阵； $\mathbf{K}_{ra}$ ——组装后作动器和板梁结构的总体耦合矩阵。

2 模态控制方程

对于连续系统或多自由度离散系统，结构振动控制通常只针对低阶模态^[7]，通过压电作动器对结构施加模态控制力，增加控制系统相应模态的阻尼值，物理坐标下板梁的运动方程为

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{K}_{ra} \mathbf{U}_a \\ y = \mathbf{G}^c \mathbf{K}_{rs} \dot{\boldsymbol{\delta}} \end{cases} \quad (12)$$

式中： $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$ ——质量矩阵、阻尼系数矩阵和刚度矩阵； y ——压电传感器输出电压， $y = U_s$ 。将式(12)写成模态坐标方程：

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}} + \Delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{q} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_{ra} \mathbf{U}_a \\ y = \mathbf{G}^c \mathbf{K}_{rs} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q} \end{cases} \quad (13)$$

式中： $\Delta = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi}$ ； $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\omega_i^2)$ ； ω_i ——第 i 阶模态的固有频率； $\boldsymbol{\Phi}$ ——特征向量。引入状态向量 $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T$ ，由式(13)可得到状态空间方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{U}_a \\ y = \mathbf{D} \mathbf{x} \end{cases} \quad (14)$$
$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Lambda} & -\Delta \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_{ra} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = [0 \quad \mathbf{G}^c \mathbf{K}_{rs} \boldsymbol{\Phi}]$$

3 目标函数与优化模型

采用速度负反馈作为反馈控制律进行主动振动控制，将压电作动器的输入电压表示为

$$\mathbf{U}_a = -\mathbf{G} \mathbf{y} = -\mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{x} \quad (15)$$

式中 G 是反馈控制增益。将上式代入式(14)的第一式可得

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{D}) \mathbf{x} \quad (16)$$

其特征方程为

$$|\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{D})| = 0 \quad (17)$$

式中 λ 为非对称矩阵 $(\mathbf{A}_0 - \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{D})$ 的特征值，可以表示成复数形式，即

$$\lambda = \mu + i\omega_d \quad (18)$$

定义控制阻尼系数 ζ ^[8]为

$$\zeta = -\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \omega_d^2}} \quad (19)$$

对于扭转模态振动控制的压电片拓扑优化问题，取 ζ 作为板梁扭转模态阻尼。为了有效抑制扭转模态，建立如下优化模型：

$$\begin{cases} \max \zeta = -\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \omega_d^2}} \\ \text{s.t.} \quad 0 < A_a < A_p \end{cases} \quad (20)$$

式中 A_a 和 A_p 分别表示压电材料和基结构上表面的面积。

4 压电片拓扑优化过程

渐进结构拓扑优化法(ESO)^[9-12]通过逐步从结构中删除低效材料，使目标函数值向期望值移动的方法得到最优拓扑结构。本文针对要解决的扭转振动问题，假设从当前压电片中删除结构第 i 个单元对应的压电材料，将删除该单元压电材料后引起的阻尼系数的变化量(即控制阻尼系数灵敏度)表示为

$$\Delta \zeta_i^j = (\zeta_i^j)^* - \zeta^j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(21)

式中： n ——压电片单元数； j ——迭代次数； ζ^j ——第 j 次迭代后结构的阻尼系数； $(\zeta_i^j)^*$ ——从当前压电片中删除结构第 i 个单元的压电材料后的控制阻尼系数。

- 采用 ESO 方法对压电片拓扑形状进行优化的具体步骤如下：
- a. 对板梁结构进行有限元网格划分,并假定初始时压电片布满整个结构表面；
 - b. 给定压电材料单元删除率(即每次需要删除的单元数和当前压电片单元数的比值)；
 - c. 分析主动控制系统,计算矩阵 A_0 、 B 和 D 的值；
 - d. 计算每个压电材料单元对应的阻尼系数灵敏度值 $\Delta \zeta_i^j = (\zeta_i^j)^* - \zeta^j$ ；
 - e. 按给定删除率删除具有最大灵敏度值并满足 $\Delta \zeta_i^j \geq 0$ 的压电材料单元；
 - f. 重复步骤 c~e,控制阻尼系数达到最大时,终止进化过程。

以图 1 所示悬臂板为例,针对板梁的扭转振动模式,即板梁的二阶模式,按照上述步骤进行优化。板梁的具体参数为:板梁尺寸为 20 mm×20 mm,厚度为 0.5 mm,弹性模量 $E=200$ GPa,泊松比 $\nu=0.3$ 。PZT 压电片的相关结构参数为:弹性模量 $E=63$ GPa,泊松比 $\nu=0.29$,删除率取 0.5%。

采用 ESO 进化算法得到删除 25% 的压电材料后压电片拓扑形状如图 3 所示,黑色区域表示优化后板梁表面贴有压电材料的区域。图 4 为压电片拓扑形状的最终优化结果。

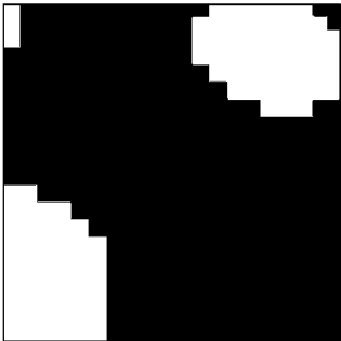


图 3 删除 25% 压电材料后压电片拓扑形状

Fig.3 Shape of PZT patch by topological optimization after cutting off 25% of piezoelectric material

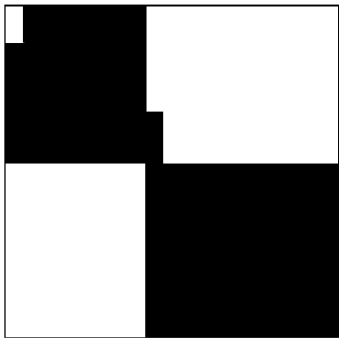


图 4 压电片拓扑形状的最终优化结果

Fig.4 Final result of topological optimization of PZT patch

针对图 4 优化结果,在 Matlab 环境下对结构振动控制进行仿真,观测悬臂板右上顶点的振动过程。图 5 所示为压电片布置于整个结构和压电片优化布置后的抑振效果,反馈增益 $G=2000$ 。可以发现,拓扑优化后的压电片对扭转振动的抑制效果得到了明显的改善。造成压电片布满整个结构对扭转模式得不到最优控制效果的原因主要是:对于单块压电作动器扭转控制来说,有些部位产生的控制力与板的弯曲变形方向相反,就会达到抑制振动的效果,但同时在某些部位控制力和板的变形方向相同,这样反而会对板的振动产生激励。因此,压电片拓扑优化的目的是去除会产生负面影响的压电材料,从而使扭转振动的控制效果得到改善。

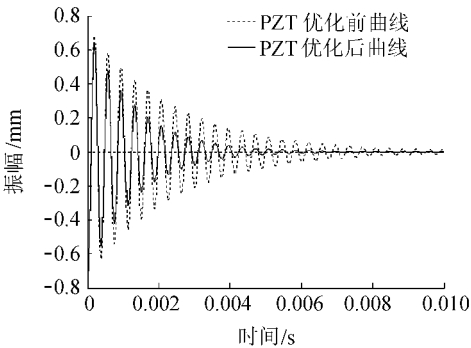


图 5 压电拓扑优化前后扭转振动仿真

Fig.5 Simulation of torsional vibration before and after topological optimization of PZT patch

5 结 论

本文以上下表面同位布置单对压电传感器/作动器的柔性悬臂板为研究对象,采用渐进结构优化方法的算法思想,针对压电作动器的拓扑形状进行优化设计,得到了压电片的优化拓扑形状。研究表明,对于结构的

扭转振动,具有特定拓扑形状的压电作动器具有较好的抑振效果.仿真结果表明了该优化方法的有效性.

参考文献:

- [1] RODGERS J P ,HAGOOD N W. Preliminary mach-scale hover testing of an integral twist-actuated rotor blade[C]//Smart Structures and Materials. San Diego ,CA :The International Society for Optical Engineering ,1998 :291-308.
- [2] GAO Peng ,LOU Yao-long ,KANZO O. Detection and suppression for mechanical resonance in hard disk drives with built-in piezoelectric sensor[C]//Smart Structures and Materials. San Diego ,CA :The International Society for Optical Engineering ,2002 :78-85.
- [3] 孙东昌 ,王大钧. 智能板振动控制的分布压电单元法[J]. 力学学报 ,1996 ,28(6) :692-699.
- [4] 张俊华 ,张方 ,朱德懋 ,等. 压电结构的控制 结构一体化设计[J]. 南京航空航天大学学报 ,1999 ,31(4) :410-413.
- [5] 古渊 ,陈伟民 ,雷跃明 ,等. 压电减振机敏柔性板上的布片位置优化研究[J]. 压电与声光 ,1999 ,21(1) :32-36.
- [6] 邱志成. 压电智能挠性板的主动振动控制研究[J]. 压电与声光 ,2002 ,24(6) :497-501.
- [7] FRISWELL M I ,INMAN D J. Sensor and actuator topology for vibration control and parameter estimation[C]//Smart Structures and Materials. San Diego ,CA :The International Society for Optical Engineering ,1997 :735-746.
- [8] WANG S Y ,TAI K ,QUEK S T. Topology optimization of piezoelectric sensors/actuators for torsional vibration control of composite plates [J]. Smart Materials and Structures ,2006 ,15(2) :253-269.
- [9] 徐斌 ,管欣 ,荣见华. 谐和激励下的连续体结构拓扑优化[J]. 西北工业大学学报 ,2004 ,22(3) :313-316.
- [10] 王必军. 渐进结构优化方法在结构动力优化中的应用[J]. 山西建筑 ,2006 ,32(4) :88-89.
- [11] 荣见华 ,姜节胜 ,胡得文 ,等. 基于应力及其灵敏度的结构拓扑优化方法[J]. 力学学报 ,2003 ,35(5) :584-591.
- [12] XIE Y M ,STEVEN G P. Evolutionary structural optimization for dynamic problems[J]. Computers and Structures ,1996 ,58(6) :1067-1073.

Topological optimization of PZT patch for plate torsional vibration control based on damping ratio

HU Xiao-wei , ZHU Deng-lin

(College of Mechanical Engineering , Hohai University , Changzhou 213022 , China)

Abstract :The structural topological method was applied to optimal design of PZT patch actuator for active control of torsional vibration of cantilever plates , and the formulae for calculation of damping ratio by feedback control and its sensitivity were given. The result of simulative analysis demonstrates the effectiveness of topological optimization design of shape of PZT patches for torsional vibration control.

Key words :intelligent structure ; PZT active control ; topological optimization of PZT patch ; evolutionary structural optimization