

实验模态数据修正计算模型的改进拉直算法

刘志军¹, 周星德²

(1. 浙江大学宁波理工学院, 浙江 宁波 315100; 2. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 : 针对实验模态数据修正计算模型拉直算法存在的缺陷 , 提出了一种改进拉直算法 : 首先通过拉直方法 , 把待修正的质量和刚度矩阵的方程变为线性方程 , 然后把位于质量和刚度矩阵带状内的元素限制在给定范围内 , 并运用优化和迭代方法确定修正模型 . 该算法还考虑了带状矩阵内存在部分值为 0 的情况 . 实例计算结果表明 , 采用改进拉直算法 , 可以缩小修正模型质量阵和刚度阵与原模型质量阵和刚度阵之间的差别 , 使修正模型更符合实际 , 精度也很高 .

关键词 : 实验模态数据 ; 计算模型 ; 改进拉直算法

中图分类号 : O326 文献标识码 : A 文章编号 : 1000-198X(2008)01-0117-04

结构振动控制^[1]动力分析所采用的模型一般都对实际结构进行了简化处理 , 为了提高结构动力分析的精度 , 需对模型进行修正 . 目前 , 模型修正的方法有多种 , 如采用二次约束的优化方法^[2]、基于神经网络的方法^[3-4]等 , 常用方法是利用实验模态数据对模型进行修正 . 一般来讲 , 计算模型具有带状稀疏特点 . 早先的修正方法^[5-6]是把原带状稀疏的矩阵变为满值矩阵 , 这对其后的运算造成较大困难 . 为保证原模型矩阵带状稀疏的特点 , 彭晓洪等^[7]提出了改进的修正方法 . 该方法忽略修正后的矩阵带状以外的元素 , 通过反复迭代达到了修正目的 . 张宪民等^[8]通过最佳矩阵逼近法来修正结构参数 , 这种方法精度很高 . 文献 [9] 提出了一种新的修正方法——拉直算法 . 该法将位于矩阵带状内的元素直接作为优化目标函数进行迭代 , 通过迭代计算就可以得到修正模型 . 拉直算法的优点是计算量小、精度高 , 不足之处是 (a) 未说明测量模态数与修正模态数之间的关系 , 如果测量模态数小于修正模态数 , 则误差较大 , 且差别越大 , 误差越大 ; (b) 修正量公式中出现奇异矩阵 ; (c) 修正量取值比例仅为 1/2 , 限制太严格 ; (d) 权矩阵 R 的选择范围较小 . 为此 , 本文对该拉直算法进行了改进 .

1 修正原理

假设结构动力计算有限元模型的质量阵与刚度阵分别为 M_1 和 K_1 , 且均为 n 阶矩阵 , 半带宽分别为 n_m 和 n_k . 通过实验模态分析得到的结构前 p 阶固有频率和振型分别为 $\omega_i, \phi_i (i = 1, 2, \dots, p)$, 测量模态数大于或等于半带宽 . 令修正矩阵分别为 $\Delta M, \Delta K$, 则修正后的质量阵和刚度阵分别为

$$M = M_1 + \Delta M \qquad K = K_1 + \Delta K \tag{1}$$

由于质量阵及刚度阵均为对称阵 , 取各自修正阵也为对称阵且仅在带状内有值 . 故而在矩阵 $\Delta M, \Delta K$ 内实

际未知元素个数分别为

$$q_m = \sum_{i=0}^{n_m-1} (n-i) \qquad q_k = \sum_{i=0}^{n_k-1} (n-i) \tag{2}$$

1.1 质量阵的修正

首先对实验模态分析所得特征向量 ϕ_i 进行归一化处理 , 即令 $\phi_i^T M_1 \phi_i = 1 (i = 1, 2, \dots, p)$, 由 $\Phi^T M \Phi = I$ 可得

$$\Phi^T \Delta M \Phi = I - m \tag{3}$$

式中 : I ——单位阵 ; $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p]$; $m = \Phi^T M_1 \Phi$.

由于满足式 (3) 的 ΔM 有无限个 , 考虑到 ΔM 阵对称 , 故只取其下三角阵内的元素作为未知变量 . 这里

不妨设 ΔM 阵的对角线上的未知元素为 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 而其下三角阵非对角线上的元素(按对角线排列)为 x_i ($i = n + 1, n + 2, \dots, (n + 1)n/2$) 则欧拉范数为

$$\|\Delta M\| = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=n+1}^{(n+1)n/2} x_i^2 \tag{4}$$

将式(4)极小化,即

$$T = \sum_{i=1}^n \rho_i x_i^2 + 2 \sum_{i=n+1}^{(n+1)n/2} \rho_i x_i^2 \tag{5}$$

式中 ρ_i 是权系数. 若 x_i 位于矩阵 ΔM 的 s 行 w 列, 则取 ρ_i 为 $1/(M(s, w))^\beta$ ($0 \leq \beta \leq 10$).

$$\text{式(5)约束条件为} \quad \Phi^T \Delta M \Phi = I - m \quad \Delta M = \Delta M^T \tag{6}$$

对式(3)进行拉直运算,得

$$(\Phi^T \otimes \Phi^T) \text{vec}(\Delta M) = \text{vec}(I - m) \tag{7}$$

式中 vec 表示对矩阵进行拉直运算.

式(7)是一个线性方程组, 现对其左端变量进行次序调整: (a) 将对角线上的变量按对角线方向依次放到列向量 $\text{vec}(\Delta M)$ 的前面部分; (b) 把下三角阵上的非对角线上变量按对角线方向依次放在列向量 $\text{vec}(\Delta M)$ 的中间; (c) 把上三角阵上的非对角线上变量按对角线方向依次放在列向量 $\text{vec}(\Delta M)$ 的后面部分. 调整过程中系数阵 $(\Phi^T \otimes \Phi^T)$ 也应进行相应的列调整. 记调整后的系数阵为 A , 而调整后的 $\text{vec}(\Delta M)$ 仍用原符号表示, 则式(7)可表示成

$$A \text{vec}(\Delta M) = \text{vec}(I - m) \tag{8}$$

$$\text{对 } \text{vec}(\Delta M) \text{ 进行半拉直变换, 得} \quad \text{vec}(\Delta M) = V \text{svec}(\Delta M) \tag{9}$$

$$\text{令 } B = A \times V \text{ 则} \quad B \text{svec}(\Delta M) = \text{vec}(I - m) \tag{10}$$

在 $\text{svec}(\Delta M)$ 中仅有前 q_m 个变量为所求变量, 其余变量不存在, 删除多余变量, 即取 B 的前 q_m 列组成新矩阵 C , 取 $\text{svec}(\Delta M)$ 的前 q_m 个变量组成新列阵 X , 则得

$$CX = \text{vec}(I - m) \tag{11}$$

$$\text{此时函数 } T \text{ 变成} \quad \Pi = \sum_{i=1}^n \rho_i x_i^2 + 2 \sum_{i=n+1}^{q_m} \rho_i x_i^2 \tag{12}$$

以上进行的调整均为列调整, 下面进行行调整. 因 $I - m_A$ 为对称阵, 拉直运算后方程组(11)出现冗余方程. 如果取 $I - m_A$ 的下三角阵所对应的方程, 则可删去上三角阵非对角线元素所对应的方程. 具体采用列调整方法. 取调整后的矩阵 C 的前 $p(p + 1)/2$ 行组成新矩阵 D , 设调整后的 $\text{vec}(I - m)$ 仍用原符号表示, 则得

$$DX = \text{vec}(I - m) \tag{13}$$

此时, 式(6)所表示的约束条件已转化为简单的线性方程组约束式(13).

按文献[9]的方法可得 $(DR_1^{-1}D^T)$ 为奇异矩阵, 应采用广义逆求其逆)

$$X = R_1^{-1} D^T (DR_1^{-1}D^T)^+ \text{vec}(I - m) \quad R_1 = \text{diag}(2\rho_1, \dots, 2\rho_n, A\rho_{n+1}, \dots, A\rho_{q_m}) \tag{14}$$

把 X 中元素值放回 ΔM 内, 取 $(1/\Lambda)\Delta M$ ($0 \leq \Lambda \leq 1$) 为修正量.

1.2 刚度阵的修正

首先对特征向量 ϕ_i 进行归一化. 令 $\phi_i^T M \phi_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, p$). 修正后的刚度应满足 $K\Phi = M\Phi\Omega^2$, 即

$$\Delta K\Phi = M\Phi\Omega^2 - K_1\Phi \tag{15}$$

进行拉直运算, 得

$$(\Phi^T \otimes I) \text{vec}(\Delta K) = \text{vec}(M\Phi\Omega^2 - K_1\Phi) \tag{16}$$

式中 $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$; I —— n 阶单位阵.

采用与质量阵修正相同的方法对式(16)左端变量进行次序调整, 记调整后的 $(\Phi^T \otimes I)$ 为 E , 而调整后的 $\text{vec}(\Delta K)$ 仍用原符号表示, 则式(16)变成

$$E \text{vec}(\Delta K) = \text{vec}(M\Phi\Omega^2 - K_1\Phi) \tag{17}$$

$$\text{对 } \text{vec}(\Delta K) \text{ 进行半拉直变换, 得} \quad \text{vec}(\Delta K) = V \text{svec}(\Delta K) \tag{18}$$

式中 svec 表示对称矩阵的半拉直运算.

$$\text{令 } F = E \times V \text{ 则} \quad F \text{svec}(\Delta K) = \text{vec}(M\Phi\Omega^2 - K_1\Phi) \tag{19}$$

在 $\text{svec}(\Delta \boldsymbol{M})$ 中仅有前 q_k 个变量为所求变量,删除多余变量,取 $\boldsymbol{F}$ 的前 q_k 列组成新矩阵 $\boldsymbol{F}_1(kn \times q_k)$,取 $\text{svec}(\Delta \boldsymbol{M})$ 的前 q_k 个变量组成新列阵 $\boldsymbol{Y}$,得

$$\boldsymbol{F}_1 \boldsymbol{Y} = \text{vec}(\boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^2 - \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{\Phi})$$

(20)

式中 $\boldsymbol{Y} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_{q_k}]^T$.

由于式(20)右端不是对称阵,故不必进行行调整.此时,式(15)所表示的约束条件已转化为简单的线性方程组约束式(20).取优化目标函数为

$$\Pi_1 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i^2 + 2 \sum_{i=n+1}^{q_k} \varepsilon_i y_i^2$$

(21)

式中 ε_i 是权系数.若 y_i 位于矩阵 $\Delta \boldsymbol{K}$ 的 s 行 w 列,则取 ε_i 为 $1/(K(s, w))$ ($0 \leq \beta \leq 10$).

按文献[9]的方法可得 $(\boldsymbol{F}_1 \boldsymbol{R}_2^{-1} \boldsymbol{F}_1^T)$ 为奇异矩阵,应采用广义逆求其逆)

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{R}_2^{-1} \boldsymbol{F}_1^T (\boldsymbol{F}_1 \boldsymbol{R}_2^{-1} \boldsymbol{F}_1^T)^+ \text{vec}(\boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^2 - \boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{\Phi})$$

(22)

式中 $\boldsymbol{R}_2 = \text{diag}(2\varepsilon_1 \ \cdots \ 2\varepsilon_n \ A\varepsilon_{n+1} \ \cdots \ A\varepsilon_{q_k})$.

把 $\boldsymbol{Y}$ 中的元素值放回 $\Delta \boldsymbol{K}$ 内,取 $(1/\Delta) \Delta \boldsymbol{K}$ ($0 \leq \Delta \leq 1$) 为修正量.

2 算例及讨论

以文献[9]算例作为本文算例,其测试的前 2 阶固有频率与模态向量见表 1.

表 1 计算频率及模态向量与测试结果的比较

Table 1 Comparison of calculated result of frequencies and mode vectors with measured data										
阶数	频率					模态向量				
	测试 结果/Hz	理论模型		本文方法		测试 结果/Hz	理论模型		本文方法	
		计算结果/Hz	误差/%	计算结果/Hz	误差/%		计算结果/Hz	误差/%	计算结果/Hz	误差/%
1	8.9910	9.1949	2.27	8.9907	0.04	0.62550	0.63745		0.62551	
						0.62079	0.63408		0.62082	
						0.60206	0.61390		0.60216	
						0.57881	0.58722		0.57882	
						0.51779	0.52944	3.12	0.51773	0.01
						0.44898	0.46604		0.44894	
						0.37679	0.39770		0.37673	
						0.29137	0.31250		0.29132	
						0.19498	0.21076		0.19489	
						0.09761	0.10566		0.09757	
						-0.58377	-0.59230	16.10	-0.58382	0.01
						-0.54160	-0.56871		-0.54161	
						-0.38207	-0.43188		-0.38202	
						-0.19495	-0.26065		-0.19483	
						0.11421	0.01439		0.11428	
						0.40688	0.28827		0.40687	
						0.67015	0.53920		0.67019	
						0.70753	0.61833		0.70751	
2	27.8525	25.2098	9.49	27.8520	0.00	0.48939	0.45122		0.48942	
						0.24767	0.23019		0.24773	

有限元模型的质量阵为

$$[\boldsymbol{M}_1] = \text{diag}(0.1 \ 0.5 \ 0.2 \ 1.0 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.8 \ 1.0 \ 0.3 \ 0.1)$$

刚度阵为三对角阵,主对角元素为

$$[63 \ 126 \ 126 \ 126 \ 126 \ 126 \ 126 \ 126 \ 126 \ 126] \times 1000$$

2 个次对角线元素均为

$$[-63 \ -63 \ -63 \ -63 \ -63 \ -63 \ -63 \ -63 \ -63 \ -63] \times 1000$$

取 $\beta=2$, $\Delta=10$,经 40 次迭代修正后的结果为

$$[\boldsymbol{M}] = \text{diag}(0.215 \ 0.593 \ 0.217 \ 0.946 \ 0.081 \ 0.0775 \ 0.726 \ 0.9798 \ 0.2928 \ 0.0984)$$

刚度阵为三对角阵,主对角元素为

$$[91.15 \quad 176.88 \quad 172.4 \quad 157 \quad 144.2 \quad 150.4 \quad 163.5 \quad 238.53 \quad 331.2 \quad 249.9] \times 1000$$

2 个次对角线元素均为

$$[-91.16 \quad -85.73 \quad -86.65 \quad -71.37 \quad -73.97 \quad -77.27 \quad -89.33 \quad -179.15 \quad -125] \times 1000$$

表 1 误差的计算公式为^[10]

$$\delta = \frac{\|\varphi_i - \varphi_{i0}\|}{\|\varphi_{i0}\|} \times 100\%$$

式中： φ_i ——修正算法的第 i 阶模态振型； φ_{i0} ——测试的第 i 阶模态振型。

从文献[9]可知,拉直算法计算结果中第 1 阶振型的相对误差为 3%,第 2 阶振型的相对误差为 6%,而本文计算结果中第 1 阶振型和第 2 阶振型的相对误差均为 1%(表 1)。由此可见,本文方法精度更高。

3 结 束 语

本文针对实验模态数据修正计算模型拉直算法存在的缺陷,提出了一种改进拉直算法。该改进拉直算法的特点是:说明了拉直运算中测量模态数与修正模态数之间的关系,修正量计算公式中奇异矩阵求逆时采用了广义逆,修正量的取值条件有所放宽,权矩阵及迭代修正量的选择更容易,随着迭代次数的加大,精度会愈来愈高并趋于稳定。总之,与文献[9]的方法相比,本文方法理论上更严密,应用更方便。

参考文献:

[1] 李会知,樊友景.某高层建筑风致振动惯性力的试验研究[J].河海大学学报:自然科学版,2004,32(3):304-307.
[2] GUI B. Optimization with quadratic constraint in application of structure dynamic model updating[J]. Transaction of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2005, 22(3): 212-215.
[3] 齐海群,谢涛,陈在礼.基于人工神经网络的转台框架结构动力修正[J].哈尔滨工业大学学报,2004,36(2):177-179.
[4] 费庆国,李爱群,张令弥.基于神经网络的非线性结构有限元模型修正研究[J].宇航学报,2005,26(3):267-269.
[5] CHEN J C, KUO C P, GARBA J A. Direct structural parameter identification by test results[J]. AIAA Journal, 1983, 21(8): 812-817.
[6] BERMAN A, NAGY E J. Improvement of a large analytical model using test data[J]. AIAA Journal, 1983, 21(8): 1168-1173.
[7] 彭晓洪,丁锡洪,周建功.用模态参数识别结果对实际结构有限元动力模型的修正[J].振动与冲击,1984,3(3):8-15.
[8] 张宪民,刘宏昭,曹惟庆.应用试验模态参数修正理论模型的最佳矩阵逼近法[J].振动工程学报,1994,7(1):70-79.
[9] 周星德,汪凤泉,陈道政.实验模态数据修正计算模型的拉直算法[J].振动工程学报,2001,14(2):245-248.
[10] 张德文,魏阜旋,张欧骥.实用完备空间中的相容修正模型[J].振动工程学报,1989,2(4):33-40.

An improved straightened algorithm for modification
of calculation model with experimental mode data

LIU Zhi-jun¹, ZHOU Xing-de²

(1. Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo 315100, China;
2. College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract In consideration of some defects in the original straightened algorithm, an improved straightened algorithm was put forward. Firstly, the equations for mass and stiffness matrices were changed into linear ones by the straightened method; then the elements within the mass and stiffness band matrices were limited to a certain range, and the modified model was obtained by use of the optimization and iteration method. In this algorithm, the case of partial elements in band matrices being zero was also taken into account. The calculated result from case study shows that the improved straightened algorithm is helpful to decrease the differences between the mass matrices and stiffness matrices of the modified model and original model, and makes the modified model closer to the reality, and thus, high precision of the modified model could be obtained.

Key words experimental mode data; calculation model; improved straightened algorithm