

具有阻尼项的高阶波动方程整体解的不存在性

吴红玲, 陈才生

(河海大学理学院, 江苏 南京 210098)

摘要 利用试验函数方法研究了带有线性阻尼项 u_t 和非线性阻尼项 $g(u)$ 的 2 类高阶波动方程的初值问题非平凡整体解的不存在性. 结果表明: 当初值函数满足一定的条件时, 第 1 类方程的任何非平凡整体解必在有限时间内爆破; 当参数和指数满足一定的条件时, 第 2 类方程也不存在非平凡整体解.

关键词 高阶波动方程; 整体解; 不存在性; 爆破

中图分类号 O175.4 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2008)01-0139-04

假设某种流体从断裂或裂开的媒介或环境流入地下时, 流体不可压缩并且媒介由 2 个连续体(即媒介断裂部分和媒介渗透部分)叠合而成, 那么在空间变量为一维的情况下, 可以导出偏微分方程组^[1]

$$\begin{cases} s_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - k_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = -\alpha(p_1 - p_2) \\ s_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} - k_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = \alpha(p_1 - p_2) \end{cases} \quad (1)$$

式中: s_1, s_2 ——媒介系数; k_1, k_2 ——渗透系数; p_1, p_2 ——压力. 它们都为正常数.

如果 s_1, k_2 可以忽略不计, 压力 $u = p_2$ 满足著名的 Barenblatt 方程

$$u_t = au_{xx} + bu_{xxt} \quad (2)$$

当只有 s_1 可以忽略时, 压力 $u = p_2$ 满足

$$u_t = au_{xx} + bu_{xxt} - cu_{xxx} \quad (3)$$

一般情况下, 系数都不可忽略时, 消去 p_1 , 那么压力 $u = p_2$ 满足偏微分方程

$$u_{tt} + au_t = b\Delta u + c\Delta u_t - d\Delta^2 u \quad (4)$$

其中 a, b, c, d 都是正常数. 这是一个具有物理意义的线性阻尼波动方程, 其解可以通过文献[2]中的 Fourier 变换得到. 但实际生活中很多问题都有较多的影响因素, 并且会出现可行解不存在的情况, 因此本文研究了带有非线性扰动 $f(u) = |u|^p, p > 1$ 的方程. 文中采用的试验函数方法是由 Mitidieri 等^[3-5]研究非线性椭圆方程和发展方程解的不存在性时首先提出的. 文献[6-7]也巧妙地应用该方法解决了各类方程非平凡整体解的不存在性. 为了使该方法能适合文中所讨论的问题, 本文对试验函数进行了适当的改进.

1 整体解不存在性的证明

$$\begin{cases} u_{tt} + au_t = b\Delta u + c\Delta u_t - d\Delta^2 u + |u|^p & (x \in \mathbf{R}^n, t > 0) \\ u(x, 0) = u_0(x) & u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n) \end{cases} \quad (5)$$

定义^[6] 设初始数据 $u_0(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n) \cap H^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n), u_1(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$. 如果对任意光滑的非负的试验函数 $\zeta(t, x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n)$, 式

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} |u|^p \zeta dx dt &= \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} u \zeta_u dx dt - a \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} u \zeta_t dx dt - b \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} u \Delta \zeta dx dt + c \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} u \Delta \zeta_t dx dt + \\ &+ d \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} u \Delta^2 \zeta dx dt - \int_{\mathbf{R}^n} [au_0(x) + u_1(x) - c\Delta u_0(x)] \zeta(0, x) dx + \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x) \zeta_t(0, x) dx \end{aligned} \quad (6)$$

成立,那么 $u(t, x) \in L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n)$ 为式(5)的整体弱解.

定理1 设 $p > 1$, 初始数据 $u_0(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n) \cap H^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, $u_1(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, 令

$$u_2(x) = au_0(x) + u_1(x) - c\Delta u_0(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n) \quad (7)$$

并且存在 $R_0 > 0$, 当 $|x| \geq R_0$ 时,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \inf u_2(x) |x|^{(3p+1)(p-1)} = \infty \quad (8)$$

成立,那么问题式(5)的任何可能的非平凡整体弱解必在有限时间内爆破.

注 式(8)优于文献[8]中的式(1.8). 因为当 $u_1(x) = 0$ 时, $u_2(x)$ 只与 $u_0(x)$ 有关, 条件(8)仍可以成立, 但文献[8]中的条件式(1.8)不成立.

证明 设 u 是式(5)的弱解. 对式(6)右边应用 Holder 不等式和 ϵ -Young 不等式^[9] 得出

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbf{R}^n} |u|^p \zeta dx dt + \int_{\mathbf{R}^n} u_2(x) \zeta(0, x) dx - \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x) \zeta(0, x) dx &\leq \sum_{i=1}^5 \frac{s_i \epsilon_i^p}{p} \int_0^T \int_{\mathbf{R}^n} |u|^p \zeta dx dt + \\ \sum_{i=1}^5 \frac{s_i}{q \epsilon_i^q} \int_0^T \int_{\mathbf{R}^n} \zeta^{-q/p} |\eta_i|^q dx dt &= \int_0^T \int_{\mathbf{R}^n} |u|^p \zeta dx dt + \sum_{i=1}^5 C_i \int_0^T \int_{\mathbf{R}^n} \zeta^{-q/p} |\eta_i|^q dx dt \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $s_1 = 1$, $s_2 = a$, $s_3 = b$, $s_4 = c$, $s_5 = d$, $\epsilon_i = (p \wedge 5s_i)^{1/p}$, $q = p \wedge (p-1)$, $\eta_1 = \zeta_u$, $\eta_2 = \zeta_t$, $\eta_3 = \Delta \zeta$, $\eta_4 = \Delta \zeta_t$, $\eta_5 = \Delta^2 \zeta$, $C_i = s_i \wedge q \epsilon_i^q$.

类似于文献[8]定义

$$\Phi(x) = \Phi_0(R^{-1}x) \quad (R > R_0) \quad \Phi_0 \in C^4_0(\mathbf{R}^n) \quad (\Phi_0 \geq 0, \text{spt } \Phi_0 \subset \{R < |x| < 2R\})$$

l_m 是 m 阶的齐次偏微分算子, 且 $|l_m \Phi_0| \leq A \Phi_0$, 常数 $A > 0$, $\forall m \geq 1$. 所以得到

$$|\Delta \Phi(x)|^q = |R^{-2} \Delta \Phi_0|^q \leq A^q R^{-2q} \Phi_0^q \quad |\Delta^2 \Phi(x)|^q = |R^{-4} \Delta^2 \Phi_0|^q \leq A^q R^{-4q} \Phi_0^q \quad (10)$$

选取试验函数

$$\zeta(t, x) = (1 - T^{-2} t^2)^q \Phi(x) \quad (11)$$

显然 $\zeta(0, x) = 0$. 将式(11)(10)代入式(9)的右边并对其进行估计, 那么对于 $R > R_0$,

$$\begin{aligned} \inf_{|x| > R} u_2(x) \int_{\mathbf{R}^n} \Phi_0(R^{-1}x) dx &\leq \int_{\mathbf{R}^n} u_2(x) \Phi_0(R^{-1}x) dx \leq \\ (K_1 T^{1-2q} + K_2 T^{1-q} + K_3 T R^{-2q} + K_4 T^{1-q} R^{-2q} + K_5 T R^{-4q}) &\int_{\mathbf{R}^n} \Phi_0(R^{-1}x) dx \end{aligned}$$

其中: $K_1 = C(4q)^{2q}$, $K_2 = C(4q)^q$, $K_3 = C_3 A^q$, $K_4 = C_4(4q)^q A^q$, $K_5 = C_5 A^q$. 就是说, 假如问题式(5)在区域内有非平凡整体弱解, 那么对于 $\forall T > 0$,

$$\inf_{|x| > R} u_2(x) \leq (K_1 + K_2 + K_4 R^{-2q}) T^{1-2q} + (K_2 + K_4 R^{-2q} + K_3 R^{-2q} + K_5 R^{-4q}) T \equiv F(T)$$

成立. 使上式的右边最小化, 得出

$$\inf_{|x| > R} u_2(x) \leq \min F(T) \leq H R^{1-4q}$$

于是可得

$$\liminf_{|x| > R \rightarrow \infty} u_2(x) = 0 \quad (12)$$

$$\inf_{|x| > R} [u_2(x) |x|^{4q-1}] \int_{\text{spt } \Phi_0} \Phi(x) |x|^{1-4q} dx \leq H^* \int_{\text{spt } \Phi_0} \Phi(x) |x|^{1-4q} dx$$

其中 H 为正常数, $H^* = 2^{4q-1} H$. 所以 $\inf_{|x| > R} [u_2(x) |x|^{4q-1}] \leq H^* \Rightarrow \liminf_{|x| \rightarrow \infty} [u_2(x) |x|^{(3p+1)(p-1)}] \leq H^*$. 这与条件式(8)矛盾. 即问题式(5)的任何可能的非平凡整体弱解必在有限时间内爆破.

2 方程的推广

下面从参数和指数的角度考虑方程非平凡整体解的不存在性.

$$\begin{cases} u_t + \alpha(x) g(u)_t = b \Delta u + c \Delta u_t - d \Delta^2 u + f(t, x) |u|^p + u(t, x) & (x \in \mathbf{R}^n, t > 0) \\ u(x, 0) = u_0(x) & u(x, 0) = u_1(x) & (x \in \mathbf{R}^n) \end{cases} \quad (13)$$

这里 $|g(u)| \leq m |u|^\theta$, $\theta > 0$, $m > 0$. 参照文献[6]对系数函数的定义方法, 令 $\alpha(x)$ 是形如 $|x|^\sigma$ ($-n < \sigma < \infty$) 的

函数 $f(t, x)$ 是形如 $t^\alpha |x|^\delta$ 的函数 ($0 \leq \alpha < 1$), $u_1(x)$ 是一个给定的函数.

定义 2^[6] 初始数据 $u_0(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n) \cap H^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, $u_1(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$. 如果对任意光滑的非负的试验函数 $\zeta = \zeta(t, x) \in C^1_0(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n)$ 等式

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} f(t, x) |u|^p \zeta dx dt + \int_{\mathbf{R}^n} [u_1(x) + g(u_0)\alpha(x) - c\Delta u_0(x)] \zeta(0, x) dx + \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} u(t, x) \zeta dx dt - \\ & \int_{\mathbf{R}^n} u_0(x) \zeta(0, x) dx = \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} u \zeta_t dx dt - \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} [g(u)\alpha(x) \zeta_t + bu\Delta \zeta - cu\Delta \zeta_t] dx dt + d \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} u \Delta^2 \zeta dx dt \end{aligned} \quad (14)$$

成立, 那么函数 $u \in L^0_{\text{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n)$, $|u|^p f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n)$ 称为式 (13) 的整体弱解.

定理 2 如果 $u_0(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n) \cap H^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, $u_1(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ 并且以下条件成立:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} u(t, x) dx dt \geq 0 \quad \int_{\mathbf{R}^n} [\alpha(x)g(u_0(x)) + u_1(x) - c\Delta u_0(x)] dx \geq 0 \quad (15)$$

指数 p 满足

$$\max\{1, \theta\} < p < I = (4 + n + 4\alpha + \delta) \min\{1/(n+2), \theta/(n+\sigma)\} \quad (16)$$

那么问题式 (13) 不存在非平凡整体弱解.

注 当 $\theta = 1$ 时, 问题式 (13) 类似于问题式 (5), 只是研究问题解的角度不同, 对此可不再考虑.

证明 采用反证法, 假设 u 是问题式 (13) 的非平凡整体弱解. 选取试验函数

$$\zeta(t, x) = \phi(R^{-4}(t^2 + |x|^8)) \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+) \text{ 且满足 } \phi(r) = \begin{cases} 1 & r \in [0, 1] \\ 0 & r \in [2, \infty) \end{cases} \quad (17)$$

很明显, $\zeta(0, x) = 0$. 再对式 (14) 的右边应用 Holder 不等式和 ε -Young 不等式, 得到

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} f(t, x) |u|^p \zeta dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} u(t, x) \zeta dx dt + \int_{\mathbf{R}^n} [u_1(x) + g(u_0)\alpha(x) - c\Delta u_0(x)] \zeta(0, x) dx \leq \\ & \alpha \varepsilon (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)^q + \alpha(\varepsilon) A_5^{p(p-\theta)} \leq \alpha(A_1^q + A_2^q + A_3^q + A_4^q + A_5^{p(p-\theta)}) \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $p > \max\{1, \theta\}$, $q = p/(p-1)$, $\varepsilon > 0$, $\alpha(\varepsilon) > 0$ 并且

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} (f\zeta)^{q/p} |\zeta_u| dx dt \right]^{1/q} & A_2 &= \left[\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} (f\zeta)^{q/p} |b\Delta \zeta|^q dx dt \right]^{1/q} \\ A_3 &= \left[\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} (f\zeta)^{q/p} |c\Delta \zeta_t|^q dx dt \right]^{1/q} & A_4 &= \left[\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} (f\zeta)^{q/p} |d\Delta^2 \zeta|^q dx dt \right]^{1/q} \\ A_5 &= \left[\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} (f\zeta)^{\theta/(p-\theta)} |m\alpha(x)\zeta_t|^{p/(p-\theta)} dx dt \right]^{(p-\theta)/p} \end{aligned}$$

定义 $\Omega_R = \{(t, x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n : t^2 + |x|^8 \leq R^4\}$, 为了估计式 (18) 的右边, 需要以下不等式^[10]:

$$|\phi^{(k)}(r)|^s \leq \alpha(\phi(r))^{s-1} \quad (1 < s < N/k, \forall k \geq 1) \quad (19)$$

那么由式 (17)~(19) 得

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} f(t, x) |u|^p \zeta dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^n} u(t, x) \zeta dx dt + \int_{\mathbf{R}^n} [u_1(x) + g(u_0)\alpha(x) - \\ & c\Delta u_0(x)] \zeta(0, x) dx \leq \alpha(R^{\mu_1} + R^{\mu_2} + R^{\mu_3} + R^{\mu_4} + R^{\mu_5}) \end{aligned} \quad (20)$$

其中: $\mu_1 = \lambda - 4q$, $\mu_2 = 2 + n/2 + [(\sigma/2 - 2)p - (2\alpha + \delta/2)\theta](p - \theta)$, $\mu_3 = \lambda - q$, $\mu_4 = \lambda - 3q$, $\mu_5 = \lambda - 2q$, $\lambda = 2 + n/2 - (2\alpha + \delta/2)(p - 1)$.

因为 $\mu_1 < \mu_4 < \mu_5 < \mu_3$, 令 $\mu_6 = \max\{\mu_2, \mu_3\}$. 如果 R 充分大, 那么下式成立:

$$\iint_{\Omega_R} f(t, x) |u|^p dx dt + \iint_{\Omega_R} u(t, x) dx dt + \int_{\mathbf{R}^n} [u_1(x) + g(u_0)\alpha(x) - c\Delta u_0(x)] dx \leq CR^{\mu_6}$$

由条件式 (16), $p < I$, 所以 $\mu_2 < 0$, $\mu_3 < 0$, 即 $\mu_6 < 0$. 因此当 $R \rightarrow \infty$ 时,

$$\iint_{\mathbf{R}^n} f(t, x) |u|^p dx dt + \iint_{\mathbf{R}^n} u(t, x) dx dt + \int_{\mathbf{R}^n} [u_1(x) + g(u_0)\alpha(x) - c\Delta u_0(x)] dx = 0$$

由条件式 (15) 可以推出 $u \equiv 0$. 所以问题式 (13) 不存在非平凡整体弱解 (即使有解, 也只是零解).

3 结 语

本文通过带阻尼项的高阶波动方程非平凡整体解的不存在性问题的研究,得出对于不同的初值或指数值 p 将影响方程解的存在性的结论.需要指出的是,指数 $p \geq 1$ 时方程的非平凡整体解是否存在还有待进一步研究.

参考文献:

[1] GUENTHER R B ,LEE J W. Partial differential equations of mathematical physics and integral equations[M]. New York :Dover Publications ,1996 210-217.

[2] 陈才生. 数学物理方程[M]. 南京 :东南大学出版社 ,2002 :123-143.

[3] MITIDIERI E ,POHOZAEV S I. Nonexistence of positive solutions for a system of quasilinear elliptic equations and inequalities in $\mathbf{R}^n$ [J]. Doklady Mathematics ,1999 ,59(3) :1351-1355.

[4] MITIDIERI E ,POHOZAEV S I. Nonexistence of weak solutions for some degenerate and singular hyperbolic problems on $\mathbf{R}^n$ [J]. The Steklov Mathematical Institute ,2001 ,232 :240-259.

[5] POHOZAEV S I ,VERON L. Blow-up results for nonlinear hyperbolic inequalities[J]. Ann Scuola Norm Sup Pisa Cl Sci ,2000 ,24(4) :393-420.

[6] HAKEM A. Blow-up results for evolution problem on $\mathbf{R}^n$ [J]. Math Nachr ,2005 ,278(9) :1033-1040.

[7] CHEN Cai-sheng. Global nonexistence of solutions to degenerate parabolic equations in unbounded domains[J]. Applied Mathematics Letters ,2006 ,19 :535-540.

[8] GUEDDA M. Local and global nonexistence of solutions to nonlinear hyperbolic inequalities[J]. Applied Mathematics Letters ,2003 ,16 :493-499.

[9] EVANS L C. Partial differential equations[M]. America :America Mathematical Society ,1998 :622-623.

[10] LAPTEV G G. Absence of solutions to higher-order evolution differential inequalities[J]. Siberian Mathematical Journal ,2003 ,44(1) :117-131.

Nonexistence of global solution to higher-order wave equation
with damping term

WU Hong-ling , CHEN Cai-sheng

(College of Sciences , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract :By use of the test function method , the nonexistence of nontrivial global solution to the initial-value problem of 2 kinds of higher-order wave equations , one with a linear damping term u_t and the other with a nonlinear damping term $(g(u))_t$, was discussed. The result shows that , if the initial-value function meets a certain condition , any nontrivial global solution to the first kind of equations is sure to blow up within a certain period of time , while if the parameters and indexes satisfy a certain condition , nontrivial global solution to the second kind of equations also does not exist.

Key words :higher-order wave equation ; global solution ; nonexistence ; blow up