

超二次二阶 Hamilton 系统的周期解

刘小运, 安天庆

(河海大学理学院, 江苏 南京 210098)

摘要 运用临界点理论中 P. H. Rabinowitz 的环绕定理证明了二阶 Hamilton 系统在新的超二次条件下周期解的存在性.

关键词 Hamilton 系统; T -周期解; 环绕定理 (PS) 条件

中图分类号 O175.15 **文献标识码** A **文章编号** 1000-198X(2008)01-0143-04

二阶 Hamilton 系统为

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \nabla F(t, x) = 0 \\ x(0) - x(T) = \dot{x}(0) - \dot{x}(T) = 0 \end{cases} \quad (t \in [0, T]) \quad (1)$$

其中 $T > 0$, $F(t, x) \in C^1([0, T] \times \mathbf{R}^N, \mathbf{R})$, 且是 t 的 T -周期函数.

文献 [1-7] 研究了 Hamilton 系统的周期解存在性问题. 文献 [1-4] 在研究该问题时要求下述 Ambrosetti-Rabinowitz 型条件 (AR) 成立:

$$0 < \mu F(t, x) \leq (\nabla F(t, x), x) \quad (\mu > 2, |x| \geq R)$$

文献 [5] 在研究该问题时引入了一类更广泛的条件

$$0 < \mu F(t, x) \leq (\nabla F(t, x), Vx) \quad (\mu > 2, |x| \geq R)$$

其中 V 是线性向量场, 并在此条件下讨论了一阶自治 Hamilton 系统 $\dot{x}(t) = J \nabla F(x)$ 周期解的存在性. 本文综合了文献 [6-8] 的证明方法, 利用文献 [9] 中的环绕定理 (即文献 [9] 中的定理 5.29) 研究了二阶 Hamilton 系统周期解的存在性.

1 解的存在性结论

令 $S^1 = \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$, $E = W^{1,2}(S^1, \mathbf{R}^N)$, E 是 Hilbert 空间, 内积和范数分别定义为

$$\langle x, y \rangle = \int_0^T (\dot{x}, \dot{y}) dt + \int_0^T (x, y) dt \quad \|x\|^2 = \int_0^T (|\dot{x}|^2 + |x|^2) dt$$

其中 $(\cdot, \cdot)$, $|\cdot|$ 分别是 $\mathbf{R}^N$ 上的内积和范数. 算子 K 及泛函定义为

$$\langle Kx, y \rangle = \int_0^T (x, y) dt \quad (\forall x, y \in E)$$

$$J(x) = \frac{1}{2} \langle (id - K)x, x \rangle - \int_0^T F(t, x) dt \quad (\forall x \in E)$$

则算子 K 是紧算子, 空间 E 可分解为 $E^0 \oplus E^+$. 其中 $E^0 = \ker(id - K) = \mathbf{R}^N$, E^+ 是 $id - K$ 的正定子空间.

据文献 [5] 可得出如下二阶 Hamilton 系统周期解的存在性结论.

定理 1 设 $t \in [0, T]$, $x \in \mathbf{R}^N$, $F(t, x)$ 满足以下条件 (a) $F(t, x) \geq 0$. (b) $F(t, x) = o(|x|^2)$ ($|x| \rightarrow 0$). (c) 设 $V: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为线性映射, 满足 $a|x|^2 \leq (Vx, x) \leq b|x|^2$ ($a > 0, b > 0$), 存在常数 $R > 0$, 当 $\frac{\mu}{b} > 2$, $|x| \geq R$ 时 $0 < \mu F(t, x) \leq (\nabla F(t, x), Vx)$, 则问题 (1) 至少有一个 T -周期解.

注 1 当二阶 Hamilton 系统转化为一阶系统时, Hamilton 函数关于一部分坐标必然是二次增长的, 所以文献 [5] 的结论和本文结论的适用范围是不同的.

注 2 下面的例子给出了满足定理 1 条件而不满足 Ambrosetti-Rabinowitz 型条件的函数, 因此本文改进了

文献[9]中的定理 2.61.

例 令 $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, 定义

$$\theta(x) = \begin{cases} \arctan(\xi_2/\xi_1) & (\xi_1 > 0, \xi_2 \geq 0) \\ \frac{\pi}{2} & (\xi_1 = 0, \xi_2 > 0) \\ \arctan(\xi_2/\xi_1) + \pi & (\xi_1 < 0) \\ \frac{3\pi}{2} & (\xi_1 = 0, \xi_2 < 0) \\ \arctan(\xi_2/\xi_1) + 2\pi & (\xi_1 > 0, \xi_2 < 0) \end{cases}$$

对任意 $\mu > 2$, 定义 $F(x) \in C^1(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{|x|^\mu}{\exp(\mu \sin(\ln|x| + \theta(x)))} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

定义线性向量场

$$V(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x$$

那么 $(V(x), x) = x_1^2 + x_2^2 = |x|^2$, 即 V 满足定理 1 的条件. 当 $x \neq 0$ 时,

$$(\nabla F(x), V(x)) = \frac{\mu |x|^\mu}{\exp(\mu \sin(\ln|x| + \theta(x)))} = \mu F(x) > 0$$

故 $F(x)$ 满足定理 1 的条件, 但不满足 Ambrosetti-Rabinowitz 型条件 (AR)^[5].

2 (PS)条件的证明

引理 1 设 $F(t, x)$ 满足定理 1 的条件, 则存在常数 $a_1 > 0, a_2 > 0$, 使

$$F(t, x) \geq a_1 |x|^{\frac{\mu}{b}} - a_2 \quad (2)$$

其中 $\frac{\mu}{b} > 2, x \in \mathbf{R}^N$.

注 3 引理 1 的证明见文献[5]中引理 1.7.

引理 2 设 $F(t, z)$ 满足定理 1 的条件, 则泛函 $f(z)$ 满足 (PS) 条件.

证明 设序列 $\{z_m\}$ 为 (PS) 序列, 即

$$|f(z_m)| \leq M, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} f'(z_m) \rightarrow 0$$

要证泛函 $f(z)$ 满足 (PS) 条件, 即证 (PS) 序列 $\{z_m\}$ 具有收敛子列. 先证 $\{z_m\}$ 有界. 现用反证法证明: 假设 $\{z_m\}$

无界, 则它存在趋于无穷大的子列. 不妨设 $\|z_m\| \rightarrow \infty (m \rightarrow +\infty)$, 则 $\frac{1}{\|z_m\|} \rightarrow 0 (m \rightarrow +\infty)$. 由条件 (c), 对 $\dot{z}_m$,

$$a |\dot{z}_m|^2 \leq (V \dot{z}_m, \dot{z}_m) \leq b |\dot{z}_m|^2$$

则有

$$\frac{1}{b} (V \dot{z}_m, \dot{z}_m) \leq |\dot{z}_m|^2 \leq \frac{1}{a} (V \dot{z}_m, \dot{z}_m)$$

由上式及条件 (c) 得

$$\begin{aligned} 2f(z_m) - \frac{1}{b} (f'(z_m), Vz_m) &= \langle (id - K)z_m, z_m \rangle - 2 \int_0^T F(t, z_m) dt - \\ &\quad \frac{1}{b} \left[\langle (id - k)z_m, Vz_m \rangle - \int_0^T (\nabla F(t, z_m), Vz_m) dt \right] = \\ &\quad \int_0^T |\dot{z}_m|^2 dt - 2 \int_0^T F(t, z_m) dt - \frac{1}{b} \left[\int_0^T (\dot{z}_m, Vz_m) dt - \int_0^T (\nabla F(t, z_m), Vz_m) dt \right] \geq \\ &\quad \int_0^T |\dot{z}_m|^2 dt - 2 \int_0^T F(t, z_m) dt - \left[\int_0^T |\dot{z}_m|^2 dt - \frac{1}{b} \int_0^T (\nabla F(t, z_m), Vz_m) dt \right] \geq \\ &\quad \frac{1}{b} \int_0^T [(\nabla F(t, z_m), Vz_m) - 2F(t, z_m)] dt \geq \\ &\quad \int_0^T \left[\frac{\mu}{b} F(t, z_m) - 2F(t, z_m) \right] dt \geq \int_0^T \left(\frac{\mu}{b} - 2 \right) F(t, z_m) dt \end{aligned} \quad (3)$$

因为 $\frac{\mu}{b} > 2$, 上式两边同除以 $\|z_m\|$, 得

$$\frac{2f(z_m) - \frac{1}{b}(f'(z_m), Vz_m)}{\|z_m\|} \geq \frac{\int_0^T \left(\frac{\mu}{b} - 2\right) F(t, z_m) dt}{\|z_m\|} \geq 0 \tag{4}$$

因 $f(z_m)$ 有界, $f'(z_m) \rightarrow 0$, $\frac{1}{\|z_m\|} \rightarrow 0$ ($m \rightarrow +\infty$), 令式 (4) 中的 $m \rightarrow +\infty$, 得

$$\frac{\int_0^T \left(\frac{\mu}{b} - 2\right) F(t, z_m) dt}{\|z_m\|} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \tag{5}$$

由 $f(z_m)$ 的定义,

$$f(z_m) = \frac{1}{2} \langle (id - K)z_m^+, z_m^+ \rangle - \int_0^T F(t, z_m) dt$$

即

$$\frac{1}{2} \langle (id - K)z_m^+, z_m^+ \rangle = f(z_m) + \int_0^T F(t, z_m) dt$$

两边同除以 $\|z_m\|^2$, 并令 $m \rightarrow +\infty$, 根据式 (5) 得

$$\frac{\|z_m^+\|}{\|z_m\|} \rightarrow 0$$

由式 (2) (3) 得

$$\begin{aligned} 2f(z_m) - \frac{1}{b}(f'(z_m), Vz_m) &\geq \int_0^T \left(\frac{\mu}{b} - 2\right) F(t, z_m) dt \geq \\ &\int_0^T \left(\frac{\mu}{b} - 2\right) (a_1 |z_m| \frac{\mu}{b} - a_2) dt \geq \\ &\int_0^T \left(\frac{\mu}{b} - 2\right) (a_1 |z_m| - a_3) dt \geq d_1 \int_0^T |z_m| dt - d_2 \geq \\ &d_1 \int_0^T (|z_m^0| - |z_m^+|) dt - d_2 \geq d_1 \|z_m^0\| - d_3 \|z_m^+\| - d_2 \end{aligned}$$

其中 $d_1 = \left(\frac{\mu}{b} - 2\right) a_1$, $d_2 = \left(\frac{\mu}{b} - 2\right) Ta_3$. 由上式得

$$2f(z_m) - \frac{1}{b}(f'(z_m), Vz_m) + d_3 \|z_m^+\| + d_2 \geq d_1 \|z_m^0\|$$

两边同除以 $\|z_m\|$ 并令 $m \rightarrow +\infty$, 得

$$\frac{\|z_m^0\|}{\|z_m\|} \rightarrow 0$$

因此, 当 $m \rightarrow +\infty$ 时,

$$1 = \frac{\|z_m\|}{\|z_m\|} \leq \frac{\|z_m^0\| + \|z_m^+\|}{\|z_m\|} \rightarrow 0$$

矛盾, 所以 $\{z_m\}$ 有界. 由文献 [10] 中命题 4.3 的证明可知 $\{z_m\}$ 有收敛子列, 泛函 $f(x)$ 满足 (PS) 条件.

3 解的存在性证明

本文利用文献 [9] 中的环绕定理来证明定理 1.

证明 a. 因为 $\forall x \in E^+, \int_0^T x(t) dt = 0$, 所以

$$\|x\|_\infty^2 \leq \frac{T}{12} \|x\|_{L^2}^2, \quad \|x\|_{L^2}^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \|\dot{x}\|_{L^2}^2 \tag{6}$$

由条件 (b), 对任意 $\xi_0 > 0$, $\exists \delta_0 > 0$, 当 $|x| < \delta_0$ 时, $\frac{F(t, x)}{|x|^2} < \xi_0$, 即 $F(t, x) < \xi_0 |x|^2$. 取 $\xi_0 = \frac{n_0}{T^2}$ ($0 < n_0 < 6$), 存在 $\delta_0 > 0$, 当 $|x| < \delta_0$ 时,

$$F(t, x) \leq \xi_0 |x|^2 \leq \xi_0 \delta_0^2 \tag{7}$$

若取 $z \in E^+$, 且满足 $\|z\|_{L^2}^2 = \rho^2 = \frac{12}{T} \delta_0^2$, 由式 (6) 得 $\|z\|_\infty^2 \leq \frac{T}{12} \frac{12}{T} \delta_0^2 = \delta_0^2$, 即

$$\|z\|_\infty = \max_{t \in [0, T]} |z(t)| \leq \delta_0 \tag{8}$$

由式 (7) (8) 得

$$J(z) = \frac{1}{2} \langle (id - K)z, z \rangle - \int_0^T F(t, z) dt = \frac{1}{2} \|z\|_{L^2}^2 - \int_0^T F(t, z) dt \geqslant \\ \frac{1}{2} \rho^2 - 2 \int_{|z| < \delta_0} \xi_0 \delta_0^2 dt = \frac{6 - n_0}{T} \delta_0^2 > 0$$

而由式(7)得

$$\|z\|^2 = \|z\|_{L^2}^2 + \|z\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2} \|z\|_{L^2}^2 + \|z\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{1(4\pi^2 + T^2)}{4\pi^2 T} \delta_0^2$$

所以, $\exists \rho > 0, \bar{a} > 0$ 对 $z \in E^+, J(z) \geqslant \bar{a}$ 其中 $\|z\| = \rho$.

b. 选择 $e \in E^+$ 且 $\|e\| = 1$. 令 $\tilde{E} = \text{span}\{e\} \oplus E^0$, 显然 $\dim \tilde{E} < +\infty$. 令 $Q = \{\gamma e : 0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_1\} \oplus \{z \in E^0 : \|z\| \leqslant \gamma_1\}$ 取 $z \in \{z \in E^0 : \|z\| \leqslant \gamma_1\}$ 那么由式(2)及 Hölder 不等式得

$$\int_0^T F(t, z + \gamma e) dt \geqslant \int_0^T (a_1 |z + \gamma e|^{\frac{a}{b}} - a_2) dt \geqslant a_3 \left(\int_0^T |z + \gamma e|^2 dt \right)^{\frac{a}{2b}} - a_2 T \geqslant \\ a_3 \left(|z|^2 T + \gamma^2 \int_0^T |e|^2 dt \right)^{\frac{a}{2b}} - a_2 T \geqslant a_4 (|z|^{\frac{a}{b}} + \gamma^{\frac{a}{b}}) - a_2 T \\ J(z + \gamma e) = \frac{1}{2} \langle (id - K)(z + \gamma e), z + \gamma e \rangle - \int_0^T F(t, z + \gamma e) dt = \\ \frac{1}{2} \gamma^2 \int_0^T |e|^2 dt - \int_0^T F(t, z + \gamma e) dt \leqslant \frac{1}{2} \gamma^2 \|e\|^2 - [a_4 (|z|^{\frac{a}{b}} + \gamma^{\frac{a}{b}}) - a_2 T] \leqslant \\ \frac{1}{2} \gamma^2 - a_4 \gamma^{\frac{a}{b}} - a_4 |z|^{\frac{a}{b}} + a_2 T$$

因 $\frac{a}{b} > 2$ 当 γ 充分大时 $J(z + \gamma e) \leqslant 0$ 则取 γ_1 充分大, 有 $f|_{\partial Q} \leqslant 0$.

c. 根据引理 2, 泛函 $J(z)$ 满足 (PS) 条件. 根据文献 [9] 中的环绕定理, $J(z)$ 存在一个非常值临界点 $z^* \in E$ 满足 $J(z^*) \geqslant \bar{a} > 0$ 而且 z^* 是系统 (1) 的 T -周期解.

参考文献:

[1] RABINOWITZ P H. Periodic solutions of Hamiltonian system[J]. Comm Pure Appl Math, 1978, 31(1): 157-184.
[2] LI Shu-jie, MICHEL W. Applications of local linking to critical point theory[J]. Jour Math Ana Appl, 1995, 189(1): 6-32.
[3] LONG Yi-ming. Multiple solutions of perturbed superquadratic second order Hamiltonian system[J]. Trans Amer Math Soc, 1987, 311(2): 749-780.
[4] TAN Chun-lei, WU Xing-ping. Notes on periodic solutions of superquadratic second order system[J]. Jour Math Ana Appl, 2003, 285(1): 8-16.
[5] AN Tian-qing. Periodic solutions of superlinear autonomous Hamiltonian systems with prescribed period[J]. Jour Math Ana Appl, 2006, 323(2): 854-863.
[6] MARTIN S. Periodic non-autonomous second-order dynamical system[J]. J Differential Equations, 2006, 223(2): 290-302.
[7] GUI Hue-fei. On periodic solutions of superquadratic Hamiltonian system[J]. Electronic J Differential Equations, 2002(8): 1-12.
[8] SCHECHTER M. Linking methods in critical point theory[M]. Boston: Birkhäuser, 1999.
[9] RABINOWITZ P H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations[C]//CBMS Reg Conf Ser in Math. Providence RI: Amer Math Soc., 1986: 7-18.
[10] MAWHIN J, WILLEM M. Critical point theory and Hamiltonian systems[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

Periodic solutions to superquadratic second-order Hamiltonian systems

LIU Xiao-yun, AN Tian-qing

(College of Sciences, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: By using P. H. Rabinowitz's linking theorem in critical point theory, the existence of T -periodic solution to second-order Hamiltonian system under the superquadratic condition was demonstrated.

Key words: Hamiltonian systems, T -periodic solution, linking theorem, (PS) condition