

用随机微分方程模型求解调压室涌波

朱永忠^{1 2}, 张 健³

(1. 武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072; 2. 河海大学理学院, 江苏 南京 210098; 3. 河海大学水利水电工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要 : 针对典型调压室水力系统 , 建立了具有随机初始条件和随机系数的涌波分析随机模型 , 从数学上严格证明了调压室涌波随机模型存在唯一的均方解 , 并进一步利用 Liouville 定理求解了其解过程的联合概率密度函数 , 最后给出了调压室涌波的均值解曲线。
关键词 : 调压室 ; 涌波 ; 随机模型 ; Liouville 定理
中图分类号 : TV732.5 文献标识码 : A 文章编号 : 1000-198X(2008)02-0189-06

调压室水位波动的计算是设计调压室时的关键问题 , 特别是调压室在甩荷时的最高涌波水位 , 对这类有压引水系统非恒定流进行计算时 , 传统方法是各种影响因素及控制变量当作确定量 , 综合选择不利条件组合 , 求出最高涌波水位 , 作为结构设计的水动荷载 , 但实地调查资料^[1-2]表明 , 按传统方法设计的调压室 (井) , 普遍存在容积或高度偏大的现象 , 实际上影响涌波大小的各种因素如库水位、带荷程度、丢荷程度、引水道摩阻等都具有随机性 , 所以调压室涌波应该是一个随机过程 , 随着科学技术的发展 , 工程结构的设计方法已经从传统的、源于简单经验估算的安全系数法逐渐上升到科学的、基于精确概率计算的可靠度设计方法 , 所以为了适应水工建筑物结构设计规范中概率可靠度的设计要求 , 必须要对调压室涌浪进行更加精确的分析 , 而采用随机的方法对其研究更为合理 , 文献 [3] 综述了随机分析方法在调压室涌波和水电站水击中的应用情况 , 文献 [4-5] 均对调压室进行了相应的随机分析 , 但主要采用 Monte-Carlo 方法对调压室涌波进行随机模拟分析 , Monte-Carlo 方法只是一种数值试验的方法 , 不能给出随机解过程的概率密度函数 , 本文在建立调压室涌波随机模型的基础上 , 证明了调压室涌波随机模型存在唯一的均方解 , 并进一步利用 Liouville 定理求解了解过程的概率密度函数。

1 调压室基本方程

图 1 为典型的简单调压室系统 , 忽略调压室下游高压管道的影响 , 认为流量 Q_0 至 Q_1 的改变是突然的 , 且直接发生在调压室的下游 , 建立运动方程及水流连续方程^[6] :

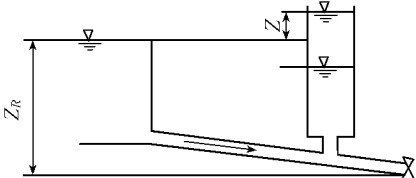


图 1 典型调压室系统
Fig.1 Typical surge tank system

$$Z = \frac{n^2 L}{R^{4/3}} V |V| + \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} \tag{1}$$

$$Q_1 = VA + F \frac{dZ}{dt} \tag{2}$$

初始条件 $V(0) = \frac{Q_0}{A}$ (3)

$$Z(0) = \frac{n^2 L}{R^{4/3}} V^2(0) \tag{4}$$

式中 : V ——引水道流速 (以水库向调压室方向为正) ; Z ——调压室瞬时相对水位 (以库水位 Z_R 为基准 , 向下为正) ; n, L, R, A ——引水道糙率、长度、水力半径及断面面积 ; F ——调压室断面面积。
设 Q_f 为机组满负荷时的引用流量 , Q_0, Q_1 分别为机组负荷变化前后的引用流量 , m_0, m_1 分别为机组负

收稿日期 2007-03-30
基金项目 武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室开放基金(2006B030)
作者简介 朱永忠(1968—) 男 , 江西瑞昌人 , 副教授 , 博士 , 主要从事随机过程及水电站水击和调压室涌浪的随机研究。

荷变化前后的带荷程度系数,则有 $Q_0 = m_0 Q_f, Q_1 = m_1 Q_f$. 若考虑全甩负荷的情形,则 $m_1 = 0$. 于是调压室基本方程可以改写为

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{L} \left(Z - \frac{n^2 L}{R^{4/3}} V |V| \right) \tag{5}$$

$$\frac{dZ}{dt} = - \frac{A}{F} V \tag{6}$$

初始条件同前.

2 随机模型

对于给定的水电站水力单元而言, L, R, A, F, g 和 Q_f 都为确定量. 引水道糙率 n 受隧洞衬砌材料、施工质量、水流流态、水流长期冲蚀的时间效应、量测误差等多种因素的影响,因而具有较大的不确定性. 由文献 [7] 假设糙率 n 服从任意三角形分布,其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - n_a}{(n_b - n_a)(n_c - n_a)} & (n_a \leq x \leq n_b) \\ \frac{n_c - x}{(n_c - n_a)(n_c - n_b)} & (n_b \leq x \leq n_c) \\ 0 & (x < n_a \text{ 或 } x > n_c) \end{cases} \tag{7}$$

式中 n_a, n_b, n_c 分别为糙率的最小值、正常值(或平均值)和最大值.

机组负荷变化前的带荷程度系数 m_0 与电站承担基荷还是峰荷、主结线形式、输电回路数、机组台数、库水位以及操作方式等多方面因素有关,因而 m_0 具有一定的随机性. 由文献 [8] 有:对于单机水力单元, m_0 服从 $[0.2, 1]$ 区间上的递增三角形分布,其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 3.125x - 0.625 & (0.2 \leq x \leq 1) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{8}$$

对于多机水力单元, m_0 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布.

将参变量 m_0 和 n 都考虑为随机变量时, V, Z 就均为随机过程,则方程 (5) (6) 外加初始条件就变为既有随机初始条件又有随机系数的非线性随机微分方程组.

引入向量表示,有

$$\begin{aligned} Y(t) &= (Z, V, X)^T \\ f(Y(t), t) &= (f_1(Z, V, X; t), f_2(Z, V, X; t), f_3(Z, V, X; t))^T \\ Y(0) &= \left(\frac{Q_f^2 L}{R^{4/3} A^2} n^2 m_0^2, \frac{Q_f m_0}{A}, \frac{g}{R^{4/3}} n^2 \right)^T \triangleq Y_0 \\ f_1(Z, V, X; t) &= - \frac{A}{F} V \\ f_2(Z, V, X; t) &= \frac{g}{L} Z - X V |V| \\ f_3(Z, V, X; t) &= 0 \end{aligned}$$

于是式 (5) (6) 及初始条件就可以写成

$$\frac{dY(t)}{dt} = f(Y(t), t) \tag{9}$$

初始条件为

$$Y(0) = Y_0 \tag{10}$$

上述方程就变为只具有随机初始条件的非线性随机微分方程组.

根据文献 [9], 可以用 Liouville 定理求解方程 (9) 和 (10) 解过程的联合概率密度函数,但是在求解其结果之前,必须要先讨论其解的存在性和唯一性.

设随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的二阶矩阵 $E\{X_1^2\}, E\{X_2^2\}, \dots, E\{X_n^2\}$ 是有限的,称 n 维随机向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ 组成的一个线性空间为 L_2^2 空间^[10]. 在 L_2^2 空间中的模定义为: $\|X\|_n = \max_{1 \leq j \leq n} \|X_j\|$. 对于方程

(9)和(10)的解的存在唯一性有如下定理:若 $f(Y(t), t): L_2^3 \times T \rightarrow L_2^3$ 连续, 则方程(9)及(10)对于任何初始条件 $Y_0 \in L_2^3$ 存在唯一的均方解.

证明: 方程(9)及(10)等价于积分方程

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t f(Y(u), u) du \quad (11)$$

下面用逐步逼近法解该积分方程.

由关系式

$$Y_{m+1}(t) = Y_0 + \int_0^t f(Y_m(u), u) du \quad (12)$$

定义了一个随机过程序列 $\{Y_m(t)\}$.

考虑四维闭区域 $D: |t-0| \leq \tau, \|Y - Y_0\|_n \leq \alpha, D \subset L_2^3 \times T$. 在 D 上 $f(Y(t), t)$ 连续因而有界, 即存在常数 M 在 D 上满足 $\|f(Y(t), t)\|_n \leq M$. 又由 V, X 在 D 上的连续性可知它们皆有界, 所以存在常数 M_V 和 M_X 在 D 上满足 $|V| \leq M_V, |X| \leq M_X$, 所以有

$$\|Y_0 - Y(t)\|_n = \left\| \int_0^t f(Y(u), u) du \right\|_n \leq \int_0^t \|f(Y(u), u)\|_n du \leq Mt \quad (13)$$

又有

$$\|Y_m - Y_{m+1}\|_n = \left\| \int_0^t [f(Y_{m-1}(u), u) - f(Y_m(u), u)] du \right\|_n \leq \int_0^t \|f(Y_{m-1}(u), u) - f(Y_m(u), u)\|_n du \quad (14)$$

而

$$f(Y_{m-1}(u), u) - f(Y_m(u), u) = \begin{bmatrix} -\frac{A}{F}(V_{m-1} - V_m) \\ \frac{g}{L}(Z_{m-1} - Z_m) - (X_{m-1}|V_{m-1}| - X_m|V_m|) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\left| \frac{g}{L}(Z_{m-1} - Z_m) - (X_{m-1}|V_{m-1}| - X_m|V_m|) \right| \leq \frac{g}{L}|Z_{m-1} - Z_m| + |X_{m-1}|V_{m-1}| - X_m|V_m|| \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} & |X_{m-1}|V_{m-1}| - X_m|V_m|| = \\ & |X_{m-1}|V_{m-1}| - X_{m-1}|V_m| + X_{m-1}|V_m| - X_m|V_m|| \leq \\ & |X_{m-1}| ||V_{m-1}| - |V_m|| + |V_m| |X_{m-1}|V_{m-1} - X_m|V_m|| = \\ & |X_{m-1}| ||V_{m-1}| - |V_m|| + |V_m| |X_{m-1}|V_{m-1} - X_{m-1}|V_m| + X_{m-1}|V_m| - X_m|V_m|| \leq \\ & M_X M_V ||V_{m-1}| - |V_m|| + M_V [|X_{m-1}| ||V_{m-1} - V_m| + |V_m| |X_{m-1} - X_m|] \leq \\ & M_X M_V ||V_{m-1}| - |V_m|| + M_V M_X |V_{m-1} - V_m| + M_V^2 |X_{m-1} - X_m| \leq \\ & (2M_X M_V + M_V^2) \|Y_{m-1} - Y_m\|_n \stackrel{\Delta}{=} N \|Y_{m-1} - Y_m\|_n \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$N = 2M_X M_V + M_V^2$$

又因为 $\left| -\frac{A}{F}(V_{m-1} - V_m) \right| \leq \frac{A}{F} \|Y_{m-1} - Y_m\|_n$, 所以有

$$\begin{aligned} & \|f(Y_{m-1}(u), u) - f(Y_m(u), u)\|_n = \\ & \max \left\{ \frac{A}{F} |V_{m-1} - V_m|, \left| \frac{g}{L}(Z_{m-1} - Z_m) - (X_{m-1}|V_{m-1}| - X_m|V_m|) \right|, 0 \right\} \leq \\ & \max \left\{ \frac{A}{F} \|Y_{m-1} - Y_m\|_n, \frac{g}{L} \|Y_{m-1} - Y_m\|_n + N \|Y_{m-1} - Y_m\|_n \right\} \leq G \|Y_{m-1} - Y_m\|_n \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$G = \max \left\{ \frac{A}{F}, \frac{g}{L} + N \right\}$$

所以有

$$\begin{aligned} \|Y_m - Y_{m+1}\|_n &= \left\| \int_0^t [f(Y_{m-1}(u), u) - f(Y_m(u), u)] du \right\|_n \leq \left| \int_0^t \|f(Y_{m-1}(u), u) - f(Y_m(u), u)\|_n du \right| \leq \\ &G \left| \int_0^t \|Y_{m-1}(u) - Y_m(u)\|_n du \right| \leq G^2 \left| \int_0^t \left(\int_0^u \|Y_{m-2}(u) - Y_{m-1}(u)\|_n du \right) du \right| \end{aligned} \quad (19)$$

于是有

$$\|Y_m - Y_{m+1}\|_n \leq \frac{MG^m t^{m+1}}{(m+1)!} \leq \frac{M(G\tau)^{m+1}}{G(m+1)!} \quad (20)$$

即有序列 $\{Y_m(t)\}$ 为一致收敛的. 所以 $\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m(t) = Y(t)$ 唯一存在.

又由于 $Y(t)$ 是均方连续序列 $\{Y_m(t)\}$ 的一致收敛的极限, 因而 $Y(t)$ 也是均方连续的. 下面来证明 $Y(t)$ 满足积分方程(11).

对于 $|t-0| \leq \tau$ 和一切 m 有

$$\begin{aligned} \|Y(t) - Y_0 - \int_0^t f(Y(u), u) du\|_n &= \|Y(t) - Y_{m+1}(t) + \int_0^t f(Y_m(u), u) du - \int_0^t f(Y(u), u) du\|_n \leq \\ &\|Y(t) - Y_{m+1}(t)\|_n + \left\| \int_0^t f(Y_m(u), u) du - \int_0^t f(Y(u), u) du \right\|_n \leq \\ &\|Y(t) - Y_{m+1}(t)\|_n + \int_0^t \|f(Y_m(u), u) - f(Y(u), u)\|_n du \end{aligned} \quad (21)$$

因为 $\{Y_m(t)\}$ 一致收敛到 $Y(t)$, 所以对于 $|t-0| \leq \tau$, 当 m 充分大时, 最后 2 项可以(关于 t 一致地)为任意小, 因而它恒等于零. 即证明了 $Y(t)$ 满足积分方程(11).

3 解过程概率密度函数的求解

由上述定理可知, 随机模型(9)及(10)存在唯一的均方解, 于是可以进一步利用 Liouville 定理求解其联合概率密度函数. 为应用 Liouville 定理, 下面先求其初始条件 Y_0 的联合分布. 令 $Y(0) = (Z, V, X)^T$ 的联合分布函数为 $F_Z(z, v, x)$ 则

$$F_Z(z, v, x) = P\left\{n^2 m_0^2 \leq \frac{R^{4/3} A^2}{Q_f^2 L} z, m_0 \leq \frac{A}{Q_f} v, n^2 \leq \frac{R^{4/3}}{g} x\right\} \quad (22)$$

由于 $Y(0) = (Z, V, X)^T$ 有 3 个变量, 而它们是由 2 个随机变量 n 与 m_0 变换而来的, 所以不能直接由 n 与 m_0 的分布求解 $Y(0) = (Z, V, X)^T$ 的分布. 为方便起见, 将 $Z(0), V(0)$ 和 $X(0)$ 的分布分开计算. 即

$$F_Z(z, v, x) = P\left\{n^2 m_0^2 \leq \frac{R^{4/3} A^2}{Q_f^2 L} z\right\} P\left\{m_0 \leq \frac{A}{Q_f} v\right\} P\left\{n^2 \leq \frac{R^{4/3}}{g} x\right\} \quad (23)$$

于是可以利用 n 与 m_0 的分布求解出 $Y(0)$ 的联合分布函数为 $F_Z(z, v, x)$, 进一步求导可以得出 $Y(0)$ 的概率密度函数 $f_Z(z, v, x)$.

下面用 Liouville 定理来求解解过程的联合概率密度函数. 令 $(Z, V, X)^T$ 的联合密度函数为 $f(z, v, x; t)$, 由 Liouville 定理^[9]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - v \frac{f}{F} \frac{\partial f}{\partial z} + \left(z \frac{g}{L} - x |v| v\right) \frac{\partial f}{\partial v} - 2x |v| f = 0 \quad (24)$$

其初始条件为 $Y_0 = (Z(0), V(0), X(0))^T$ 的联合密度函数 $f_Z(z, v, x)$.

利用数值方法求解该双曲型偏微分方程初值问题的数值解, 可以得到 $(Z, V, X)^T$ 的联合概率密度函数 $f(z, v, x; t)$, 进而关于 v 和 x 边际积分, 得到 Z 的概率密度函数 $f_Z(z; t) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} f(z, v, x; t) dv dx$, 其中 $v_{\min}, v_{\max}$ 为 V 的变化范围, $x_{\min}, x_{\max}$ 为 X 的变化范围. 由 Z 的概率密度函数, 可以求解 Z 的其他概率信息. 如 Z 的均值过程为 $m_Z(t) = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} z f_Z(z; t) dz$, $z_{\min}, z_{\max}$ 为 Z 的变化范围, 调压室最大均值瞬时相对水位为 $Z_{\max} = \max\{m_Z(t)\}$ 等.

4 算 例

某水电站在电力系统中的主要任务为调峰, 有 4 台机组, 共用一引水水力单元, 引水隧洞长 1200m, 直径

$d = 10.5\text{ m}$ 断面面积 $A = 86.59\text{ m}^2$,用钢筋混凝土衬砌 ,引水道糙率正常值 $n_b = 0.013$,最小值 $n_a = 0.012$,最大值 $n_c = 0.014$.调压井为简单圆筒式 ,直径 $D = 20.0\text{ m}$,断面面积 $F = 314.16\text{ m}^2$.4 台机组最大引用流量为 $Q_{\max} = 4Q_{\text{单}} = 4 \times 85\text{ m}^3/\text{s}$,电站工作水头约为 380.0 m .水库正常蓄水位 $Z_n = 707.0\text{ m}$,坝底高程 $Z_D = 670.0\text{ m}$,下游水位约为 324.0 m .计算分析调压室最高涌波水位.

4.1 采用确定性数学模型求解

假设 4 台机组水轮机导叶瞬时全关(即 $m_0 = 1.0, m_1 = 0.0$) ,引水道糙率 n 取可能的最小值 ,即 $n = 0.012$,利用调压室涌波计算的解析公式^[6]求解得相对于水库的最高涌波约为 22.38 m ,采用龙格库特法对基本方程进行数值积分 ,得出涌波波动过程 ,并从中选出最高涌波为 22.31 m ,发生时间为 $t = 34\text{ s}$.现取数值解作为调压室最高涌波确定性求解结果 ,用负荷产生的以库水位 Z_R 为基准的最高涌波为(取绝对值) $\Delta Z'_m = 22.31\text{ m}$.

4.2 采用随机模型求解

该算例为担任峰荷的多机水力单元 ,用负荷前该水力单元担负负荷程度系数 m_0 的分布假设为 $[0, 1]$ 上的均匀分布 .此时 , $n_a = 0.012, n_b = 0.013, n_c = 0.014, L = 1\,200\text{ m}, Q_f = 4 \times 85\text{ m}^3/\text{s} = 340\text{ m}^3/\text{s}, F = 314.16\text{ m}^2, R = 2.625\text{ m}, d = 10.5\text{ m}$,断面面积 $A = \frac{\pi d^2}{4} = 86.59\text{ m}^2$.则由式(24)有 $(Z, V, X)^T$ 的联合密度函数 $f(z, v, x; t)$ 满足的 Liouville 方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t} - 0.275\,623\,885\,v \frac{\partial f}{\partial z} + (0.008\,166\,666\,z - xv|v|) \frac{\partial f}{\partial v} - 2x|v|f = 0 \tag{25}$$

利用差分方法可以求解上述初值问题的偏微分方程 ,从而可以得到 $f(z, v, x; t)$ 的数值 .在求解的过程中必须注意 $f(z, v, x; t)$ 还要满足条件 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z, v, x; t) \, dv \, dz \, dx = 1 \qquad f(z, v, x; t) \geqslant 0 \qquad f(\pm \infty, v, x; t) = 0$$
$$f(z, \pm \infty, x; t) = 0 \qquad f(z, v, \pm \infty; t) = 0$$

有了 $f(z, v, x; t)$ 后 ,进行边际积分 $f_z(z; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z, v, x; t) \, dv \, dx$,得出 Z 的一维概率密度函数族 .进一步可得 Z 的均值曲线 $m_z(t) = E[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} zf_z(z; t) \, dz$ (如图 2 所示 .图 2 中调压室水位为 0 时即库水位 ,图中数字分别表示在波峰和波谷处用龙格库特法和随机分析法计算得到的调压室涌波相对水位) .从而可知调压室涌波相对水位的最高均值结果为 20.82 m ,发生时间仍为 34 s .并且可以计算出概率 $P\{Z(t) \leqslant 20.82\} = 0.978$,即实际调压室涌波相对水位只有 2.2% 的概率大于其最高均值涌波相对水位.

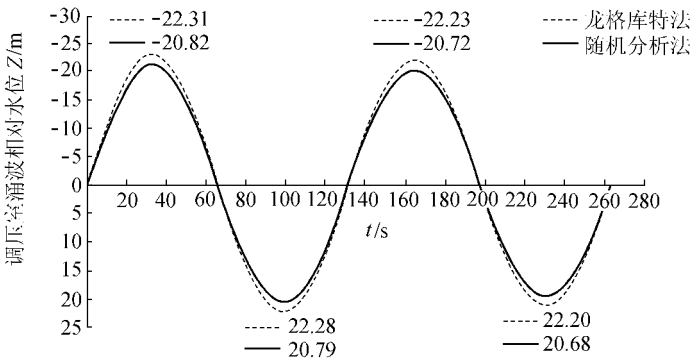


图 2 调压室涌波均值过程线

Fig.2 Mean value curves of surge in the surge tank

5 结 论

a. 确定性计算方法是在最不利条件组合下计算出 1 个最高涌波值 ,然后与最高静水位叠加作为调压室结构的设计荷载 .而随机模型考虑了各随机参量取值的概率分布 ,即综合考虑了各种计算条件 ,并计入了各

种计算条件出现概率的大小,给出的是调压室最大涌波值的均值等概率信息,并且在给出调压室涌波最大值的同时,还给出了相应的取值概率。

b. 考虑随机模型时,其均值结果要比确定性计算方法下得出的结果小。在生产实践中,很难做到所有的量都会在同一时刻取到最不利的值,从而确定性方法计算出来的结果肯定要比随机方法计算的均值结果大。说明传统的确定性计算方法计算出的最大涌波值结果过于保守,按此结果作为调压室结构的设计荷载,其设计结果会增大工程成本和工程工作量。

参考文献：

[1] 丁浩. 水电站有压引水系统非恒定流[M]. 北京: 水利电力出版社, 1984: 93-150.

[2] 张芹芬, 索丽生. 水电站水击与调压室涌波随机分析研究进展[J]. 水利水电科技进展, 1998, 18(3): 7-11.

[3] 朱永忠, 索丽生. 随机分析方法及其在水击和调压室涌浪中的研究进展[J]. 水利水电科技进展, 2007, 27(3): 90-94.

[4] 张芹芬, 索丽生. 调压室涌波分析的随机模型[J]. 河海大学学报, 1997, 25(5): 41-45.

[5] 朱永忠, 房玉亭, 索丽生. 调压室涌波最高水位随机分析的显式计算方法[J]. 河海大学学报: 自然科学版, 2005, 33(6): 650-653.

[6] 王世泽. 水电站建筑物[M]. 北京: 水利电力出版社, 1987: 107-108.

[7] 黄克中. 明渠糙率对水深和流速影响的概率分布[J]. 武汉水利电力学院学报, 1984(3): 23-29.

[8] 张芹芬. 水电站水击与调压室涌浪的随机分析[D]. 南京: 河海大学, 1998.

[9] 张炳根, 赵玉芝. 科学与工程中的随机微分方程[M]. 北京: 海洋出版社, 1980.

[10] 夏乐天, 朱永忠. 工程随机过程[M]. 南京: 河海大学出版社, 2000.

An application of random differential equation theory to surge in a surge tank

ZHU Yong-zhong^{1, 2}, ZHANG Jian³

- (1. State Key Laboratory of Water Conservancy and Hydroelectric Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China ;
2. College of Science, Hohai University, Nanjing 210098, China ;
3. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: A stochastic model with initial stochastic conditions and stochastic coefficients for surge calculation was developed for the typical hydraulic system of a surge tank. The existence of one and only mean square solution of the stochastic model was strictly verified in mathematics, and the joint probability density function in solution processing of surge was solved with Liouville Equation. Finally, the mean value curves of surge were provided.

Key words: surge tank ; surge ; stochastic model ; Liouville theorem