

基于尖点突变理论的基桩极限承载力判定及预测

王新泉^{1 2}, 陈永辉^{1 2}, 刘汉龙^{1 2}

(1. 河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098;

2. 河海大学岩土工程科学研究所, 江苏 南京 210098)

摘要 将尖点突变理论应用于基桩极限承载力判定及预测中,建立了基桩极限承载力判定及预测的尖点突变模型,提出了根据尖点突变理论进行基桩极限承载力判定及预测的 4 类判定方法,对判定方法的 2 种适用情况进行了分析.将 4 类判定方法与文献中的判定方法进行了比较.结果表明,判定思路Ⅳ可用于工况 1 情况下极限承载力的进一步判定.经静载荷试验数据验证,对基桩刺入破坏、屈曲破坏的极限承载力判定及预测,建立的尖点突变模型均有较好的适用性,可由判定思路Ⅱ在工况 2 的情况下,进行基桩极限承载力的预测估计.

关键词 尖点突变理论;极限承载力;静载荷试验;刺入破坏;屈曲破坏

中图分类号 TU473.1

文献标识码 A

文章编号 1000-198X(2008)02-0248-05

目前较多采用的双曲线模型、指数模型、抛物线模型及灰色理论在某些桩型和工况下对基桩的极限承载力估算及预测效果较好^[1-5].但从众多基桩静载荷试验的资料来看,基桩的破坏具有突变性,在上级荷载作用下沉降量尚小,但在下级荷载作用下可能突然发生破坏的工程实例较多,此时若采用常用的估算及预测模型会使预测结果失真,因此需要根据有限的实测数据准确地判定及预测基桩的极限承载力^[6-7].

突变理论起源于光滑映射的 Whitney 奇异性理论和动力学系统的 Poincare-Andronov 分叉理论.突变理论是研究不连续现象的一个数学分支,近 30 年有了很大的发展,在各个领域中应用广泛^[8-12].

桩的破坏属于突变理论的范畴,可采用突变理论进行桩的极限承载力判定及预测,但目前采用突变理论研究基桩极限承载力的较少.文献[8-9]中采用突变理论对基桩的承载力进行了研究,采用的 $P-s$ 曲线为 $P(s) = \lambda s e^{-\left(\frac{s}{a}\right)}$, a 由假定荷载沉降曲线符合抛物线模型,经拟合出的抛物线确定,并赋予 λ 明确的物理意义为 EA/L .由于预测结果与实测值存在较大的偏差,因此采用了修正系数 ψ, β 对计算结果进行修正,修正后的计算结果与实测值基本接近.2 个修正系数虽然均赋予了明确的物理意义,但缺乏理论依据,同时在试桩荷载级数较少的情况下,计算结果存在明显失真的情况.

本文将尖点突变理论应用于基桩的极限承载力判定及预测中,建立了基桩极限承载力判定及预测的尖点突变模型.根据参数 a, λ 的确定方法和基桩极限承载力的确定方法,提出了由尖点突变理论进行基桩极限承载力判定及预测的 4 类判定方法,对其适用情况进行了分析,并将 4 类判定方法与文献[9]中的判定方法进行了比较.利用静载荷试验数据对 4 类判定方法在基桩刺入破坏、屈曲破坏时极限承载力判定,预测中的适用性及各判定方法的准确性进行了比较.

1 尖点突变理论概述

尖点突变模型的势函数形式:

$$V(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ux^2 + vx \quad (1)$$

式中: x ——系统的状态变量; u, v ——系统的控制变量.

平衡曲面形式：
$$x^3 + ux + v = 0 \tag{2}$$

确定的曲面称为突变流形 ,它表示系统的平衡状态应满足的条件 ,相应的点数学上称为临界点或极值点 .
系统的奇点集满足式 (2) 和系统势函数的二阶导数为零的条件 ,即

$$V(x) = 3x^2 + u = 0 \tag{3}$$

由式 (2) 和式 (3) 消去 x ,得参数平面方程：

$$D = 4u^3 + 27v^2 = 0 \tag{4}$$

式 (4) 在几何上表示系统的奇点集在控制变量 u, v 确定的平面上的投影 .当系统的控制参数满足式 (4) 时 ,系统将处于临界平衡状态并且最终要突跳到稳定的平衡状态 ,完成系统的突变 .

确定的曲线 D 称为分叉集 ,判别式为

$$D = 4u^3 + 27v^2$$

当 $D > 0$ 时 ,基桩处于稳定区 ,说明此时基桩稳定 ;当 $D < 0$ 时 ,表示此时基桩处于不稳定状态 .当跨越临界线时 ,基桩发生突变 ,此时 $u < 0, D = 0$,方程 $D = 4u^3 + 27v^2 = 0$ 有 3 个实根 .即

$$x_1 = 2\left(-\frac{u}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad x_2 = x_3 = -\left(-\frac{u}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 2 个重根是稳定的 ,另一个是不稳定的 .

2 基于尖点突变理论的基桩极限承载力判定及预测

2.1 尖点突变模型的建立

假设基桩的 P - s 曲线符合方程：

$$P(s) = \lambda s e^{-\left(\frac{s}{a}\right)} \tag{5}$$

式中 λ, h 为参数 ,可由静载荷试验数据 ,利用数据拟合或 Excel 的规划求解进行计算 .

取整个基桩作为研究对象 ,根据功能增量原理可以写出在总竖向位移为 s 时基桩所受荷载势能的改变量 .基桩所受的外力有自身重力、基桩侧摩阻力、基桩端阻力 .总势能是各力所做功的和：

$$V(s) = \int P(s) ds - (F_1 + F_2)s + Gs \tag{6}$$

式中： F_1 ——基桩所承受的端阻力； F_2 ——基桩所承受的侧摩阻力； G ——基桩本身产生的重力 .

记
$$F = F_1 + F_2 \tag{7}$$

$$V'(u) = P(u) - F + G \tag{8}$$

将 $P(u)$ 在 $s_1 = 2a$ 处用 Taylor 级数展开可变为

$$P(s) = \left(-F + G + \frac{2a\lambda}{e^2}\right) - \frac{\lambda(s - 2a)}{e^2} + \frac{\lambda(s - 2a)^3}{6a^2e^2} + O[s - 2a]^4 \tag{9}$$

令 $x = s - 2a$,并将高于 3 次的项略去 ,式 (9) 可变为

$$P(s) = \left(-F + G + \frac{2a\lambda}{e^2}\right) - \frac{\lambda x}{e^2} + \frac{\lambda x^3}{6a^2e^2} \tag{10}$$

将式 (10) 转化为尖点突变的标准形式 .若令：

$$x = \frac{t}{\sqrt[3]{\frac{\lambda}{6a^2e^2}}}$$

则式 (10) 变为

$$P(t) = t^3 + ut + v = 0 \tag{11}$$

式 (11) 即为平衡曲面 .其中：

$$u = -\frac{6\frac{1}{3}\lambda}{e^{\frac{4}{3}}\left(\frac{\lambda}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad v = b_0 = -F + G + \frac{2a\lambda}{e^2}$$

则分叉集方程为

$$D = 4u^3 + 27v^2 = -\frac{24a^2\lambda^2}{e^4} + 27\left(-F + G + \frac{2a}{e^2}\right)^2 = 0 \quad (12)$$

当 $D > 0$ 时,基桩处于稳定区,说明此时基桩是稳定的;当 $D < 0$ 时,表示此时基桩处于不稳定状态。当跨越临界线时,基桩发生突变,此时 $u < 0, D = 0$,方程 $D = 4u^3 + 27v^2 = 0$ 有 3 个实根,其中 2 个重根是稳定的,另一个是不稳定的,由问题的实际意义可知 $v < 0$ 时,

$$t_1 = 2\left(-\frac{u}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad t_2 = t_3 = -\left(-\frac{u}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由稳定根 t_2 到不稳定根 t_1 ,表明跨越分叉集的状态量 t 发生跳跃。

2.2 由尖点突变理论进行基桩极限承载力判定及预测方法

2.2.1 方法 1

由不稳定的根 t_1 可得基桩极限承载力对应的沉降为

$$s_1 = \frac{t_1}{\sqrt[3]{\frac{\lambda}{6a^2e^2}}} + 2a = 2a - \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \left(\sqrt[3]{\frac{\lambda}{a^2}} \right)^3 \quad (13)$$

由式(5)即可求得极限承载力。

$$P(s) = \lambda s_1 e^{-\left(\frac{s_1}{a}\right)} \quad (14)$$

2.2.2 方法 2

由式(12)解得

$$F_1 = \frac{3e^2G + 6a\lambda - 2\sqrt{2}a\lambda}{3e^2} \quad (15)$$

$$F_2 = \frac{3e^2G + 6a\lambda + 2\sqrt{2}a\lambda}{3e^2} \quad (16)$$

由计算出的 F_2 作为基桩的极限承载力。

参数 a, λ 的确定是影响极限承载力判定及预测准确性的重要因素。参数 a, λ 的确定方法有 2 种 (a) 参数 a, λ 均作为变量,由实测的静载荷试验数据通过规划求解拟合而出 (b) 假定荷载沉降曲线符合抛物线模型,由实测的静载荷试验数据拟合出抛物线模型求解出 a ,然后由规划求解拟合出 λ 。

根据参数 a, λ 及基桩极限承载力的确定方法,由突变理论进行基桩的极限承载力判定共有 4 种思路。

a. 判定思路 I: 参数 a, λ 均作为变量,由实测的静载荷试验数据通过规划求解拟合而出,由式(14)判定极限承载力。

b. 判定思路 II: 参数 a, λ 均作为变量,由实测的静载荷试验数据通过规划求解拟合而出,由式(16)判定极限承载力。

c. 判定思路 III: 假定荷载沉降曲线符合抛物线模型,由实测的静载荷试验数据拟合出抛物线模型求解出 a ,然后由规划求解拟合出 λ ,由式(14)判定极限承载力。

d. 判定思路 IV: 假定荷载沉降曲线符合抛物线模型,由实测的静载荷试验数据拟合出抛物线模型求解出 a ,然后由规划求解拟合出 λ ,由式(16)判定极限承载力。

2.3 由尖点突变理论进行基桩极限承载力判定及预测的适用情况

a. 工况 1: 静载荷试验中荷载分级数较多,在最末一级荷载作用下,基桩出现持续下沉或失稳破坏,在倒数第 2 级荷载作用下沉降量尚小,此时,规范^[13]规定桩极限承载力取发生明显陡降的起始点对应的荷载值或取前一级荷载值。工况 1 情况下可采用突变理论进一步更准确地判定该基桩的极限承载力。

b. 工况 2: 静载荷试验试桩中由于客观条件限制,或试桩反力装置出现故障等原因,使试桩压不到破坏,试桩未达到极限状态,给桩体极限承载力的评价和确定增加了困难。根据单桩初始加载阶段的实测数据,基桩极限承载力可由尖点突变模型进行判定。

3 基于突变理论不同确定基桩极限承载力方法的比较

3.1 本文 4 类判定方法与文献[9]中判定方法的比较

比较采用的数据为文献[9]中的试桩数据,即上海曹阳新苑三期 PHC 管桩试验项目的 1 号、3 号试桩。桩

端持力层为密实的灰色粉砂、黏质粉土或灰色粉质黏土,桩周土体为杂填土、砂质粉土、淤泥质粉质黏土等。桩径 40 cm,1 号桩长 33 m,3 号桩长 29 m。采用前 11 级加载的静载荷试验数据进行分析。

如表 1 所示,采用判定思路Ⅳ进行极限承载力的判定,判定结果准确性较高,优于文献[9]中的判定方法。同时判定思路Ⅳ的各参数均通过静载荷试验数据拟合分析得出,思路清晰,计算简单。判定思路Ⅳ可用于工况 1 情况下基桩极限承载力的进一步判定。同时应该注意到这 2 根桩极限承载力判定的结果与实测值吻合较好的一个主要因素是极限荷载在最末一级荷载的附近,可用来分析的荷载级数多。若加载级数较少或极限荷载与最末一级荷载差别较大,各种判定方法的精度会降低。

3.2 本文 4 类判定方法对基桩刺入破坏时的适用性及各判定方法的比较

分别取以上分析中 1 号桩的前 7、8、9、10、11 级荷载进行分析,如表 2 所示。由于篇幅所限,表 2 中只列出了荷载级数为 7、11 时的计算数据。随着荷载级数的减小,采用判定思路Ⅰ和判定思路Ⅱ拟合的参数 a 、 λ 变化很小,而判定思路Ⅳ所得的极限承载力与实测极限承载力产生的误差逐渐增大。所以当荷载级数较少,对极限承载力的预测采用判定思路Ⅱ可获得更好的效果。

3.3 本文 4 类判定方法对基桩屈曲破坏时的适用性及各判定方法的比较

采用文献[14]中的数据进行分析。文献[14]中试桩为设计直径 $d=1.0$ m,埋深 60.00 m 的钻孔灌注桩,进入弱风化泥质砂岩层。荷载在第 17 级荷载 17 280 kN 时试验桩破坏,破坏

类型属于屈曲破坏,见表 3。由于篇幅所限,表 3 中只列出了荷载级数为 13、16 时的计算数据。本文的判定方法对屈曲破坏的基桩具有适用性。取前 16 级荷载进行分析时,判定思路Ⅱ和Ⅳ所判定的极限承载力较接近,与实测极限承载力基本吻合。随着分析数据与荷载级数的减少,判定思路Ⅳ所判定的极限承载力较实际极限承载力差别越来越大。而判定思路Ⅱ,虽然所判定的极限承载力较实际极限承载力差别也在增大,但误差小于判定思路Ⅳ,可见判定思路Ⅱ在工况 2 情况下比其他判定思路更具有优越性。

表 1 本文 4 类判定方法及文献[9]中判定方法的比较

Table 1 The comparison between the four methods and method in the reference[9]							
桩号	a/mm	s_1/mm	λ	判定的极限承载力/kN	实际极限承载力/kN	偏差/%	判定方法
1	22.61	23.85	799 272.73	4 094.15	3 497	17.08	文献[9]方法
	15.16	8.88	493.50	2 439.73	3 497	-30.23	判定思路Ⅰ
	15.16	8.88	493.50	3 060.27	3 497	-12.49	判定思路Ⅱ
	21.02	12.31	425.93	2 919.27	3 497	-16.52	判定思路Ⅲ
	21.02	12.31	425.93	3 645.95	3 497	4.26	判定思路Ⅳ
3	33.50	35.34	909 517.24	4 666.21	3 242	43.93	文献[9]方法
	32.76	19.19	264.13	2 821.84	3 242	-12.96	判定思路Ⅰ
	32.76	19.19	264.13	3 517.19	3 242	8.49	判定思路Ⅱ
	30.86	18.08	274.99	2 766.93	3 242	-14.65	判定思路Ⅲ
	30.86	18.08	274.99	3 450.13	3 242	6.42	判定思路Ⅳ

表 2 本文 4 类判定方法对基桩刺入破坏时的适用性及各判定方法的比较

Table 2 The applicability and comparison of the four methods in determining and forecasting ultimate bearing capacity against punching failure							
桩号	a/mm	s_1/mm	λ	判定的极限承载力/kN	实际极限承载力/kN	偏差/%	判定方法
11	15.16	8.88	493.50	2 439.73	3 497	-30.23	判定思路Ⅰ
	15.16	8.88	493.50	3 060.27	3 497	-12.49	判定思路Ⅱ
	21.02	12.31	425.93	2 919.27	3 497	-16.52	判定思路Ⅲ
	21.02	12.31	425.93	3 645.95	3 497	4.26	判定思路Ⅳ
7	14.22	8.33	504.74	2 340.20	3 497	-33.08	判定思路Ⅰ
	14.22	8.33	504.74	2 938.70	3 497	-15.97	判定思路Ⅱ
	11.83	6.93	566.85	2 185.83	3 497	-37.49	判定思路Ⅲ
	11.83	6.93	566.85	2 750.17	3 497	-21.36	判定思路Ⅳ

表 3 本文 4 类判定方法对基桩屈曲破坏适用性及各判定方法的比较

Table 3 The applicability and comparison of the four methods in determining and forecasting ultimate bearing capacity against buckling failure							
荷载级数	a/mm	s_1/mm	λ	判定的极限承载力/kN	实际极限承载力/kN	偏差/%	判定方法
16	52.37	30.68	891.13	15 217.79	17 200	-11.52	判定思路Ⅰ
	52.37	30.68	891.13	18 711.43	17 200	8.79	判定思路Ⅱ
	53.56	31.38	882.57	15 414.81	17 200	-10.38	判定思路Ⅲ
	53.56	31.38	882.57	18 952.05	17 200	10.19	判定思路Ⅳ
13	32.17	18.85	1 070.78	11 234.29	17 200	-34.68	判定思路Ⅰ
	32.17	18.85	1 070.78	13 846.20	17 200	-19.50	判定思路Ⅱ
	24.11	14.12	1 268.07	9 970.65	17 200	-42.03	判定思路Ⅲ
	24.11	14.12	1 268.07	12 302.87	17 200	-28.47	判定思路Ⅳ

4 结 语

本文将尖点突变理论引入到基桩极限承载力的判定及预测中,建立了基桩极限承载力判定及预测的尖点突变模型。

a. 根据不同的参数 a 、 λ 确定方法及极限承载力的判定方法,本文提出了用尖点突变理论进行基桩极限承载力判定的4种思路.判定思路Ⅱ和判定思路Ⅳ在不同工况下分别有其适用性.通过实例分析,可由判定思路Ⅳ在工况1的情况下进行极限承载力的进一步判定;由判定思路Ⅱ在工况2的情况下进行极限承载力的预测估计。

b. 对基桩刺入破坏、屈曲破坏时的极限承载力判定,建立的尖点突变模型均有较好的适用性。

c. 由于基桩破坏影响因素的复杂性和现场数据采集的误差,由尖点突变理论判定的极限承载力与实际极限承载力存在一定偏差,实际工程应用中可进行适当修正。

d. 荷载传递函数的选择对由尖点突变理论判定的极限承载力有较大影响,有必要进一步研究能更好模拟静载荷试验中荷载沉降关系的荷载传递函数的尖点突变理论模型。

参考文献:

- [1] 张文伟, 陆志华, 陈翀. 试桩未达破坏时单桩极限承载力的确定[J]. 桂林工学院学报, 2006, 23(3): 370-373.
- [2] 高笑娟, 朱向荣. 用双曲线法预测挤扩支盘桩的极限承载力[J]. 岩土力学, 2006, 27(9): 1596-1600.
- [3] 罗战友. 单桩竖向极限承载力的灰色预测[D]. 西安: 西安建筑科技大学, 2001.
- [4] 邓志勇, 陆培毅. 几种单桩竖向极限承载力预测模型的对比分析[J]. 岩土力学, 2002, 23(4): 428-431.
- [5] 戚科骏, 徐美娟, 宰金珉. 单桩承载力的灰色预测方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(12): 2069-2071.
- [6] FLEMING W G K. A new method for single pile settlement prediction and analysis[J]. Geotechnique, 1992, 42: 411-425.
- [7] FELLENIUS B H. The analysis of results from routine pile load tests[J]. Ground Engineering, 1980, 13: 19-31.
- [8] 崔树琴, 张远芳, 李传镇, 等. 突变理论在单桩竖向承载力确定中的应用[J]. 水利与建筑工程学报, 2006, 4(2): 19-22.
- [9] 崔树琴. 突变理论在单桩竖向承载力确定中的应用[D]. 乌鲁木齐: 新疆农业大学, 2006.
- [10] 赵正跃, 项成龙. 突变理论在环境预测中的应用[J]. 中国环境监测, 2002, 18(4): 59-60.
- [11] 尚新生, 邵生俊, 谢定义. 突变理论在砂土液化分析中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(1): 35-38.
- [12] 张亚平, 张起森. 尖点突变理论在交通流预测中的应用[J]. 系统工程学报, 2000, 15(3): 272-276.
- [13] JGJ 106—2003, 建筑基桩检测技术规范[S].
- [14] 刘齐建. 大直径桥梁基桩竖向承载力分析及试验研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2002.

Determining and forecasting ultimate bearing capacity of pile based on cusp catastrophe theory

WANG Xin-quan^{1,2}, CHEN Yong-hui^{1,2}, LIU Han-long^{1,2}

(1. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. Geotechnical Research Institute, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: A cusp catastrophe model was established for determining and forecasting ultimate bearing capacity of pile based on cusp catastrophe theory. Four determination methods were brought forward and compared with the previous methods. Two application conditions of the model were analyzed. Results show that method Ⅳ can be used in further determination of ultimate bearing capacity of pile under condition 1. Through validating the data of static load test, it is found out that the cusp catastrophe model is applicable in determining ultimate bearing capacity against punching failure and buckling failure. Method Ⅱ can be used in forecasting ultimate bearing capacity of pile under condition 2.

Key words: cusp catastrophe theory; ultimate bearing capacity; static loading test; punching failure; buckling failure