

几种复对称矩阵及复斜对称矩阵的分解

严 花,周继东

(河海大学理学院,江苏 南京 210098)

摘要 提出一个复矩阵是对称酉矩阵的充要条件,并用逻辑上类似的方法证明一个类似于复对称正规矩阵的复斜对称正规矩阵的分解,最后对复斜对称矩阵得到了类似于复对称矩阵 Takagi 分解的结论.

关键词 正规矩阵 斜对称矩阵 酉矩阵 Takagi 分解

中图分类号 O151.21 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2008)02-0283-03

由于在实际应用中会出现复对称矩阵,本文通过比较分析复对称矩阵的 Takagi 分解和复对称正规矩阵的分解,得到了复对称酉矩阵、复斜对称矩阵及复斜对称正规矩阵的几种分解.

1 预备知识

定义 设 $A \in M_n(C)$, A^T 表示 A 的转置, $\bar{A}$ 表示 A 的共轭, A^H 表示 A 的共轭转置.

若 $A = A^T$, 则称 A 为对称矩阵; 若 $A = -A^T$, 则称 A 为斜对称矩阵; 若 $A^H A = A A^H$, 则称 A 为正规矩阵; 若 $A^H A = I$, 则称 A 为酉矩阵.

引理 1 若 $A = B_1 + iB_2$, 其中 B_1 和 B_2 是实矩阵, 则 A 是对称矩阵当且仅当 B_1 和 B_2 都是实对称矩阵.

引理 2^[1] 设 $A \in M_n(R)$, 则 A 是正规矩阵当且仅当存在实正交矩阵 $Q \in M_n(R)$, 使得

$$Q^T A Q = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) \in M_n(R)$$

其中每个 A_j 或者是 1×1 矩阵, 或者是形如 $\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$ 的 2×2 矩阵 ($j = 1, 2, \dots, k$).

特别地, (a) $A = A^T$ 当且仅当存在实正交矩阵 $Q \in M_n(R)$, 使得 $Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 其中所有 $\lambda_i \in R$; (b) $A = -A^T$ 当且仅当存在实正交矩阵 $Q \in M_n(R)$, 使得 $Q^T A Q = \text{diag}(0, \dots, 0, A_1, \dots, A_k)$ 其中每个 $A_j \in M_2(R)$ 有形式 $\begin{pmatrix} 0 & \beta_j \\ -\beta_j & 0 \end{pmatrix}$ ($j = 1, 2, \dots, k$).

引理 3^[1] 设 $A \in M_n(C)$, 则 A 是对称的正规矩阵当且仅当存在实正交阵 $Q \in M_n(R)$ 和对角阵 $\Lambda \in M_n(C)$ 使得 $A = Q \Lambda Q^T$.

引理 4^[1-2] (Hermite 矩阵的谱分解) 设 $A \in M_n$ 是给定的, 则 A 是 Hermite 矩阵当且仅当存在酉矩阵 $U \in M_n$ 和实对角矩阵 $\Lambda \in M_n$, 使得 $A = U \Lambda U^H$.

引理 5^[3-4] (Takagi 分解) 如果 $A \in M_n(C)$ 是对称矩阵, 则存在酉矩阵 $U \in M_n$ 和非负实对角矩阵 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ 使得 $A = U \Sigma U^T$, 其中 U 的诸列是由 $A \bar{A}$ 的特征向量组成的标准正交组, 而 Σ 的对角元是 $A \bar{A}$ 的相应特征值的非负平方根.

2 主要结论

引理 3 给出了复对称正规矩阵的一个刻画. 对于复对称酉矩阵和复斜对称矩阵, 有如下 3 个定理.

定理 1 设 $A \in M_n(C)$ 是对称矩阵, 则 A 是酉矩阵当且仅当存在实正交矩阵 $Q \in M_n$ 和对角矩阵

$A \in M_n(C)$, 使得 $A = Q\Lambda Q^T$, 其中 $\Lambda\bar{\Lambda} = I$.

证明 充分性显然, 现证必要性.

令 $A = B + iC$. 因为 A 对称, 所以由引理 1 知 $B = B^T, C = C^T$.

因为

$$AA^H = (B^2 + C^2) + i(CB - BC) \quad A^HA = (B^2 + C^2) + i(BC - CB)$$

并且

$$AA^H = A^HA = I$$

所以

$$BC = CB, \text{ 且 } B^2 + C^2 = I$$

由 B, C 可交换知, B 和 C 可经实正交矩阵 Q 同时实对角化:

$$B = QD_1Q^T \quad C = QD_2Q^T$$

其中 D_1, D_2 是实对角矩阵. 于是有

$$B^2 + C^2 = Q(D_1^2 + D_2^2)Q^T = I$$

即

$$D_1^2 + D_2^2 = I \quad A = B + iC = Q(D_1 + iD_2)Q^T = Q\Lambda Q^T$$

其中 $\Lambda = D_1 + iD_2$, 且 $\Lambda\bar{\Lambda} = (D_1 + iD_2)(D_1 - iD_2) = D_1^2 + D_2^2 = I$. 证毕.

例 当 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 时, 它有分解 $A = Q\Lambda Q^T$, 其中 $\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

推论 设 $A \in M_n(C)$ 是对称矩阵. 则 A 是酉矩阵当且仅当存在酉矩阵 U 使得 $A = UU^T$.

定理 2 矩阵 $A \in M_n(C)$ 既是斜对称的又是正规的当且仅当存在实正交矩阵 $Q \in M_n(R)$ 使得

$$A = QDQ^T \quad D = \text{diag}(0, \dots, 0, A_1, \dots, A_k)$$

每个 $A_j \in M_2(C)$ 有形式 $A_j = \begin{pmatrix} 0 & z_j \\ -z_j & 0 \end{pmatrix}$, $z_j \in C (j = 1, 2, \dots, k)$.

证明 充分性容易验证, 现证必要性.

令 $A = B + iC$, 其中 $B, C \in M_n(R)$. 因为 $A = -A^T$, 所以

$$B = -B^T \quad C = -C^T \quad A^HA = -(B^2 + C^2) + i(CB - BC)$$

$$AA^H = -(B^2 + C^2) + i(BC - CB)$$

因为 A 正规, 所以 $BC = CB$, 即 B, C 可交换, 且 B 与 C 都是实的斜对称阵, 所以存在实正交矩阵 Q , 使得

$$B = QD_1Q^T \quad C = QD_2Q^T$$

$$D_1 = \text{diag}(0, \dots, 0, B_1, \dots, B_k) \quad D_2 = \text{diag}(0, \dots, 0, C_1, \dots, C_k) \quad B_j, C_j \in M_2(R) (j = 1, 2, \dots, k)$$

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & \beta_j \\ -\beta_j & 0 \end{pmatrix} \quad C_j = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_j \\ -\gamma_j & 0 \end{pmatrix}$$

从而

$$A = B + iC = Q(D_1 + iD_2)Q^T = QDQ^T$$

$$D = \text{diag}(0, \dots, 0, A_1, \dots, A_k) \quad A_j = B_j + iC_j = \begin{pmatrix} 0 & z_j \\ -z_j & 0 \end{pmatrix} \in M_2(C) \quad z_j = \beta_j + i\gamma_j (j = 1, 2, \dots, k). \text{ 证毕.}$$

由引理 5 知, 每个复对称矩阵有著名的 Takagi 分解(其推导过程见文献[1, 5-8]). 下面对于复斜对称矩阵给出一个类似的分解.

定理 3 矩阵 $A \in M_n(C)$ 是斜对称的当且仅当存在酉矩阵 $U \in M_n$ 使得

$$A = U \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & A_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & A_k \end{bmatrix} U^T, \text{ 其中 } A_j = \begin{pmatrix} 0 & z_j \\ -z_j & 0 \end{pmatrix} \in M_2(C) (j = 1, 2, \dots, k)$$

证明 充分性显然,下证必要性.

a. 由 A 是斜对称的,易知 $A\bar{A} = -AA^H$ 是 Hermite 矩阵,所以由引理 4 存在酉矩阵 $V \in M_n$ 和一个非正实对角矩阵 $\Lambda_1 \in M_n$,使得 $A\bar{A} = V\Lambda_1 V^H$,从而 $\bar{A}A = \bar{V}\Lambda_1 V^T$.

b. 注意到 $V^H A \bar{V}$ 显然是斜对称,且利用 a 可得:

$$(V^H A \bar{V})(V^H A \bar{V})^H = -V^H A \bar{V} V^T \bar{A} V = -V^H A \bar{A} V = -V^H V \Lambda_1 V^H V = -\Lambda_1$$

$$(V^H A \bar{V})^H (V^H A \bar{V}) = -V^T \bar{A} V V^H A \bar{V} = -V^T \bar{A} A V = -V^T \bar{V} \Lambda_1 V^T V = -(\overline{V^H V}) \Lambda_1 (\overline{V^H V}) = -\Lambda_1$$

从而 $V^H A \bar{V}$ 是斜对称正规矩阵.

因此由定理 2,存在 $D \in M_n$ 和实正交矩阵 $Q \in M_n(R)$ 使得 $V^H A \bar{V} = QDQ^T$,其中

$$D = \text{diag}(0, \cdots, 0, A_1, \cdots, A_k) \quad A_j = \begin{pmatrix} 0 & z_j \\ -z_j & 0 \end{pmatrix} \in M_2(C)$$

c. 由 b 可知 $A = (VQ)D(VQ)^T$,记 $U = VQ$,则 U 是酉阵,且 $A = UDU^T$. 证毕.

参考文献:

[1] HORN R A,JOHNSON C R. Matrix analysis[M]. Cambridge :Cambridge University Press,1985.
[2] HORN R A,JOHNSON C R. Topics in matrix analysis[M]. Cambridge :Cambridge University Press,1989.
[3] TAKAGI T. On an algebraic problem related to an analytic theorem of caratheodory and on an allied theorem of landau[J]. Japan J Math, 1925,1 :83-93.
[4] SCHUR I. Ein satz uber quadratische formen mit komplexen koeffizienten[J]. Amer J Math,1945,67 :472-480.
[5] SIEGEL C L. Symplectic geometry[J]. Amer J Math,1943,65(1) :14-15.
[6] TAUSSKY O. The role of symmetric matrices in the study of general matrices[J]. Linear Algebra Appl,1972,5 :147-154.
[7] HUA L K. On the theory of automorphic functions of a matrix variable I-Geometric basis[J]. Amer J Math,1944,66 :470-488.
[8] JACOBSON N. Normal semi-linear transformations[J]. Amer J Math,1939,61 :45-58.

Factorizations of complex symmetric matrices and
complex skew-symmetric matrices

YAN Hua, ZHOU Ji-dong

(College of Sciences, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: It is pointed out that the complex symmetric matrices are the sufficient and necessary condition of the symmetric unitary matrices. The factorization of a complex skew-symmetric normal matrix, which is similar to a complex symmetric normal matrix, was demonstrated using a logically similar method. It is concluded that the Takagi factorization of complex symmetric matrices is also applicable to complex skew-symmetric matrices.

Key words: normal matrix ; skew-symmetric matrix ; unitary matrix ; Takagi 's factorization