

卡尔曼滤波校正技术在水动力学模型 实时洪水预报中的应用

王船海¹, 吴晓玲¹, 周 全²

(1. 河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 江苏 南京 210098;

2. 浦东新区水文水资源管理署, 上海 201208)

摘要 将卡尔曼滤波技术与水动力学模型实时洪水预报相结合, 提出了“交替校正”方法, 分别建立水位与流量的状态方程, 进行交替滤波计算, 较好地解决了滤波计算中不同类型状态量之间共同校正的问题. 对长江干流局部河段的实例验证表明, 卡尔曼滤波技术应用于单一河道水动力学模型没有破坏模型的稳定性, 局部的校正对全河道具有较好的带动作用, 说明卡尔曼滤波技术应用到水动力学模型的实时校正中是可行而且有效的.

关键词 实时洪水预报; 卡尔曼滤波; 水动力学模型; “交替校正”方法

中图分类号 TV122 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2008)03-0300-06

根据流域动力模型理论^[1], 流域可以分解为山地和平原 2 部分. 山区的洪水运动受地形的影响, 流速快、汇流时间短、运动情况相对简单. 平原区的洪水运动受上游来水、当地降雨、下游顶托和人类活动等综合影响, 洪水运动情况复杂. 要准确模拟平原区的洪水运动必然要引进水动力学方法来解决河网的汇流问题. 水动力学方法近年来被广泛应用于流域洪水模拟中^[2], 但真正应用于实时洪水预报的成功案例还不多见. 主要存在以下问题: (a) 如何把水动力学应用到流域洪水预报中, 建立有物理依据的预报模型; (b) 下边界条件的处理问题; (c) 水动力学的实时校正问题. 本文重点研究水动力学方法的实时校正问题.

实时校正技术是实时洪水预报系统(模型)的关键技术^[3-5]. 没有好的实时校正技术来支撑的实时洪水预报系统, 其预报精度是无法满足生产应用需求的. 由于水位、流量是随时间变化的, 因此滤波理论比较适合应用到洪水预报的实时校正中, 由卡尔曼滤波的计算特点(如在线估计时间短、存储量小等)决定了它适合实时处理和计算机运算^[6].

20 世纪 70 年代初到 80 年代末卡尔曼滤波技术大量应用于水文学、水动力学以及水质等方面的研究中^[7]. 在利用水动力学模型进行洪水预报的校正中, 运用卡尔曼滤波技术一般采取 2 种方式: 一是把卡尔曼滤波技术仅用于误差处理中, 在得到水位、流量预测结果的基础上进行误差修正, 如欧洲洪水预报系统(EFFS)^[8]等; 另外一种方式是直接利用卡尔曼滤波技术对状态量进行预测、修正, 如把水位、流量综合在一起作状态量进行滤波计算^[9-10], 或把水位、流量的涨差一起作为研究对象, 建立滤波器方程^[11]等.

由于采用卡尔曼滤波技术修改水动力学模型计算的状态量, 破坏了原有的水动力学模型的计算关系, 因此首先重点关注该方法在不同计算阶段(滤波、预测)的稳定性以及计算成果的有效性问题.

1 计算方法

1.1 卡尔曼滤波

一个动态系统在没有外部干扰时, 其未来状态可以根据现时状态通过已知的运动方程来确定. 但总存在某种外部干扰或者是对运动方程的描述不可能十分精确, 卡尔曼滤波理论的基本思想就是采用信号与噪声

的状态空间模型,利用前一时刻的估计和观测值来更新对状态变量的估计,求现时刻的估计值^[12-13].卡尔曼滤波系统的基本方程由状态方程和量测方程组成,通常可表示为

$$X_{k+1} = \Phi_{k+1} | k X_k + \Psi_{k+1} | k U_k + \Gamma_{k+1} | k w_k \quad (k \geq 0) \tag{1}$$

$$Y_{k+1} = H_{k+1} X_{k+1} + v_{k+1} \quad (k \geq 0) \tag{2}$$

其中,动态噪声 w_k 与量测噪声 v_k 有以下特点: $E \{w_k\} = \bar{w}_k, E \{v_k\} = \bar{v}_k, \text{Cov}(w_k, w_j) = \Omega_k \delta_{kj}, \text{Cov}(v_k, v_j) = R_k \delta_{kj}, \text{Cov}(w_k, v_j) = 0$,其中 δ_{kj} 为克罗内克函数, $\bar{w}_k$ 为动态噪声均值, $\bar{v}_k$ 为量测噪声均值(一般情况下噪声均值为零), Ω_k 为动态噪声方差, R_k 为量测噪声方差.

设初始状态的统计特性为: $E \{X_0\} = \mu_0, \text{Var} \{X_0\} = E \{X_0 - \mu_0\} (X_0 - \mu_0)^T = P_0, \text{Cov}(X_0, w_k) = 0, \text{Cov}(X_0, v_k) = 0$,其中 μ_0 为初始状态量均值, P_0 为初始方差, X_0 与 w_k, v_k 都不相关.

相应的滤波器递推公式如下:

预测 $\hat{X}_{k+1} | k = \Phi_{k+1} | k \hat{X}_k + \Psi_{k+1} | k U_k + \Gamma_{k+1} | k \bar{w}_k \tag{3}$

状态预测误差协方差阵 $P_{k+1} | k = \Phi_{k+1} | k P_k | k \Phi_{k+1}^T | k + \Gamma_{k+1} | k \Omega_k \Gamma_{k+1}^T | k \tag{4}$

增益矩阵 $K_{k+1} = P_{k+1} | k H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1} | k H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \tag{5}$

滤波 $\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_{k+1} | k + K_{k+1} (Y_{k+1} - \bar{v}_{k+1} - H_{k+1} \hat{X}_{k+1} | k) \tag{6}$

状态滤波误差协方差阵 $P_{k+1} | k+1 = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1} | k \tag{7}$

给 $X_0, P_0, R_0, \Omega_0, \bar{w}_0, \bar{v}_0$ 赋初值后,滤波公式按式(3)~(7)依次执行,便可实现卡尔曼滤波计算.可见卡尔曼滤波的递推公式既可以得到滤波估计值,又可以得到误差的方差阵,即产生它自身的误差分析,此为卡尔曼滤波器的一个显著优点.

1.2 单一河道一维水动力学模型

描述河道水流运动的圣维南方程组^[14]为

$$\begin{cases} B \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial Z}{\partial x} + gA \frac{|Q|Q}{K^2} = qV_X \end{cases} \tag{8}$$

式中: q ——旁侧入流; Q, A, B, Z ——河道断面流量、过水面积、河宽和水位; V_X ——旁侧入流流速在干流水流方向上的分量,一般可以近似为零; K ——流量模数; α ——动量校正系数.

对任意由断面 j 与断面 $j+1$ 组成的河段,采用四点线性隐格式^[15]对方程组(8)进行离散,得到任一河段的差分方程组为

$$\begin{cases} Q_{j+1}^{k+1} - Q_j^{k+1} + C_j Z_{j+1}^{k+1} + C_j Z_j^{k+1} = D_j + C_j (Z_{j+1}^k + Z_j^k) \\ E_j Q_j^{k+1} + G_j Q_{j+1}^{k+1} + F_j Z_{j+1}^{k+1} - F_j Z_j^{k+1} = H_j (Q_{j+1}^k + Q_j^k) \end{cases} \tag{9}$$

其中: $C_j = \frac{B_{j+\frac{1}{2}} \Delta x_j}{2\Delta t}, D_j = q_{j+\frac{1}{2}} \Delta x_j, E_j = \frac{\Delta x_j}{2\Delta t} - (\alpha u)_j^k + \frac{g}{2} \left(\frac{|u|n^2}{R^{4/3}} \right)_j^k \Delta x_j, F_j = (gA)_{j+\frac{1}{2}}^k, H_j = \frac{\Delta x_j}{2\Delta t}, G_j = \frac{\Delta x_j}{2\Delta t} + (\alpha u)_{j+1}^k + \frac{g}{2} \left(\frac{|u|n^2}{R^{4/3}} \right)_{j+1}^k \Delta x_j. C_j, D_j, E_j, F_j, G_j, H_j$ 均由初值计算,所以方程组为常数系数线性方程组.对一条具有 L 个河段的河道(图 1),有 $2(L+1)$ 个未知变量,可列出 $2L$ 个方程,加上河道两端的边界条件,形成封闭的代数方程组.以上边界用流量条件 Q_{up} 、下边界用水位条件 Z_{down} 为例进行计算,概化式(9)为

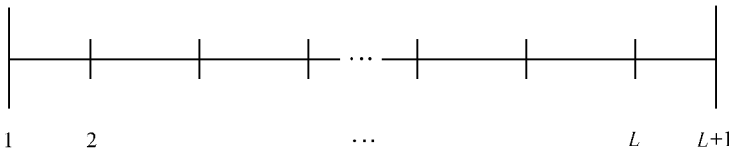


图 1 计算河段示意图

Fig.1 Schematic diagram of computation river sections

$$\begin{cases} A\mathbf{Q}^{k+1} + B\mathbf{Z}^{k+1} = C\mathbf{Z}^k + U_1 \\ D\mathbf{Q}^{k+1} + E\mathbf{Z}^{k+1} = F\mathbf{Q}^k + U_2 \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix} & B = C &= \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ C_1 & C_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & C_L & C_L \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} E_1 & G_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & E_L & G_L \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} & E &= \begin{bmatrix} -F_1 & F_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -F_L & F_L \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \\ F &= \begin{bmatrix} H_1 & H_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & H_L & H_L \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} & U_1 &= \begin{bmatrix} Q_{up} \\ D_1 \\ \\ D_L \end{bmatrix} & U_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ Z_{down} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}^{k+1} &= \begin{bmatrix} Q_1^{k+1} \\ Q_2^{k+1} \\ \\ Q_{L+1}^{k+1} \end{bmatrix} & \mathbf{Q}^k &= \begin{bmatrix} Q_1^k \\ Q_2^k \\ \\ Q_{L+1}^k \end{bmatrix} & \mathbf{Z}^{k+1} &= \begin{bmatrix} Z_1^{k+1} \\ Z_2^{k+1} \\ \\ Z_{L+1}^{k+1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Z}^k &= (Z_1^k, Z_2^k, \dots, Z_{L+1}^k)^T \end{aligned}$$

1.3 结合卡尔曼滤波技术的水动力学模型

以水动力学模型为基础,分别建立以水位、流量作为状态量的独立滤波器方程,滤波过程为两滤波器交替进行(称为“交替校正”方法),其状态方程采用式(1)的形式,由式(10)变换为

$$\mathbf{Z}^{k+1} = (-DA^{-1}B + E)^{-1}(-DA^{-1}C)\mathbf{Z}^k + (-DA^{-1}B + E)^{-1}(F\mathbf{Q}^k - DA^{-1}U_1 + U_2) \quad (11)$$

$$\mathbf{Q}^{k+1} = (A - BE^{-1}D)^{-1}(-BE^{-1}F)\mathbf{Q}^k + (A - BE^{-1}D)^{-1}(C\mathbf{Z}^k - BE^{-1}U_2 + U_1) \quad (12)$$

分别引入动态噪声 w_Z, w_Q 和量测噪声 v_Z, v_Q 后,变换式(11)和式(12)形式,结合相应的量测方程,简化形式如下:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}^{k+1} = \Phi_Z^{k+1|k} \mathbf{Z}^k + \Psi_Z^{k+1|k} \mathbf{Q}^k + U_Z^k + w_Z^k + \Gamma_Z^{k+1|k} w_Q^k \\ y_Z^{k+1} = H_Z^{k+1} \mathbf{Z}^{k+1} + v_Z^{k+1} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \mathbf{Q}^{k+1} = \Phi_Q^{k+1|k} \mathbf{Q}^k + \Psi_Q^{k+1|k} \mathbf{Z}^k + U_Q^k + w_Q^k + \Gamma_Q^{k+1|k} w_Z^k \\ y_Q^{k+1} = H_Q^{k+1} \mathbf{Q}^{k+1} + v_Q^{k+1} \end{cases} \quad (14)$$

以式(13)水位滤波器为例,预测误差协方差阵为

$$\begin{aligned} P_Z^{k+1|k} &= \Phi_Z^{k+1|k} P_Z^k (\Phi_Z^{k+1|k})^T + \Psi_Z^{k+1|k} P_Q^k (\Psi_Z^{k+1|k})^T + \Phi_Z^{k+1|k} E (\tilde{Z}^k \tilde{Q}^{kT}) (\Psi_Z^{k+1|k})^T + \\ &E (w_Z^k w_Q^{kT} (\Gamma_Z^{k+1|k})^T) + \Psi_Z^{k+1|k} E (\tilde{Q}^k \tilde{Z}^{kT}) (\Phi_Z^{k+1|k})^T + \\ &\Omega_Z^k + \Gamma_Z^{k+1|k} \Omega_Q^k (\Gamma_Z^{k+1|k})^T + E (\Gamma_Z^{k+1|k} w_Q^k w_Z^{kT}) \end{aligned} \quad (15)$$

由式(15)可见滤波器计算中需要对水位、流量误差的相关关系($E(\tilde{Z}^k \tilde{Q}^{kT})$, $E(\tilde{Q}^k \tilde{Z}^{kT})$)以及二者噪声之间的相关关系($E(w_Z^k w_Q^{kT} (\Gamma_Z^{k+1|k})^T)$, $E(\Gamma_Z^{k+1|k} w_Q^k w_Z^{kT})$)做出统计,这在实际河道计算中是较难实现的. 简化“交替校正”方法的预测误差协方差阵,认为式(13) $\Psi_Z^{k+1|k} \mathbf{Q}^k$ 项仅为状态方程的输入项.

由于滤波器的基础水动力学方程是非线性的,因此在构造滤波器方程时,系数阵中不可避免地包含初始时刻的状态量,在滤波计算时,进行局部线性化处理.

2 验证计算及结果分析

为具体考察‘交替校正’方法在实际单一河道中的校正效果,以及该法对预测产生的影响,以长江上游干流河道为试验河段(图 2)进行验证计算,试验资料为 1983 年 5 月 22 日 0 时至 6 月 12 日 0 时共约 20 d 洪水过程.为考察当地的校正效果,以及当地校正对相邻断面的影响,设置 3 种方案进行比较:(a)把一维水动力学模型计算结果作为本次研究对比的依据,称“纯水动力学”方案;(b)设置‘校正带动’方案,考察‘校正断面’(实测站点所在断面)的滤波校正对‘非校正断面’(无实测站的一般河道断面)的校正带动作用以及预测影响;(c)选清溪场站为‘水位校正带动站点’,万县站为‘流量校正带动站点’,这 2 个站的对应水位或流量实测数据不参与滤波校正计算,除此之外所有实测站点作为‘校正断面’参与滤波,对于所有实测点的观测资料都参与校正计算的方案称为‘全校正’方案.



图 2 河道测站分布
Fig.2 Distribution of stations in the river

2.1 滤波

卡尔曼滤波算法是一种以误差方差最小为原则的最优估计算法.当对状态估计的时间与最后量测的时间相同时,称之为‘滤波’;若在最后的量测时间之后,则为‘预测’^[13].不同方案计算结果的确定性系数如表 1 所示.

由表 1 可见‘全校正’方案中各计算状态量与实测过程一致吻合,“校正带动”方案中仅有‘校正带动站点’的计算结果与实测过程相比略有偏差,但效果仍好于“纯水动力学”方案计算结果.可见无论断面上有无实测数据的校正,经过‘交替校正’之后,“校正带动站点”的状态量在确定性系数上相对于“纯水动力学”方案来说都有所改善.

表 1 滤波阶段各种计算方案成果确定性系数对比

Table 1 Comparison between the deterministic coefficients of different cases in the filtering period

计算方案	水位确定性系数					流量确定性系数		
	寸滩	长寿	清溪场	忠县	万县	清溪场	万县	奉节
“纯水动力学”方案	0.92	0.93	0.90	0.89	0.91	0.92	0.90	0.88
“全校正”方案	1	1	1	1	1	1	1	1
“校正带动”方案	1	1	0.97	1	1	1	0.96	1

为形象说明本文滤波校正方法对‘非校正断面’水位、流量的带动作用,考察‘校正带动站点’的‘纯水动力学’方案、“校正带动”方案与实测过程的拟合情况,如图 3 所示.

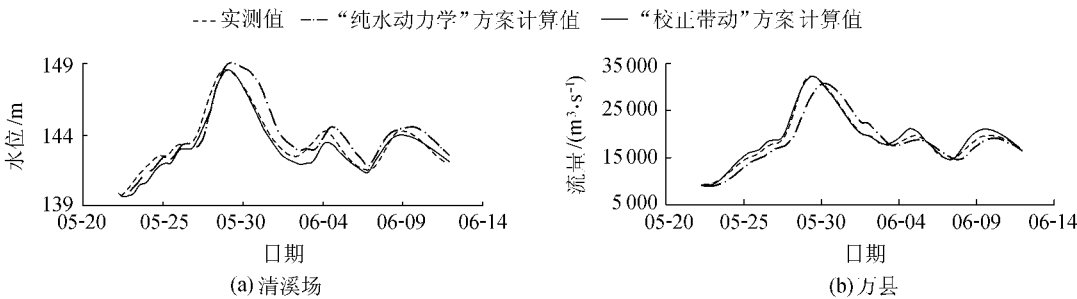


图 3 1983 年‘校正带动站点’的校正效果
Fig.3 The updating efficiency of the driven updating stations in 1983

由图 3 可见,上、下游状态量的滤波校正对中间‘校正带动站点’的状态量有明显的带动作用,从而说明在滤波计算中,卡尔曼滤波技术不仅对于实测站点有良好的校正效果,对于其间‘非校正断面’的状态量也有明显的校正影响,由此验证了‘交替校正’方法在河道滤波计算中的有效性.

2.2 预测

在‘全校正’方案和‘校正带动’方案的前提下,各实测点在 1 h,3 h,5 h 不同预见期时段内的预测过程确定性系数统计见表 2.

表2 预见期内2种计算方案的确定性系数对比

Table 2 Comparison between the deterministic coefficients of two cases during the forecast period

计算方案	预测 时间/h	水位确定性系数					流量确定性系数		
		寸滩	长寿	清溪场	忠县	万县	清溪场	万县	奉节
“全校正”方案	1	0.98	0.99	0.97	0.96	0.98	0.98	0.97	0.94
	3	0.96	0.99	0.95	0.94	0.96	0.96	0.93	0.94
	5	0.95	0.98	0.92	0.91	0.96	0.95	0.89	0.93
“校正带动”方案	1	0.98	0.99	0.96	0.96	0.98	0.97	0.96	0.94
	3	0.96	0.99	0.93	0.94	0.96	0.96	0.92	0.94
	5	0.95	0.98	0.91	0.91	0.96	0.95	0.88	0.93

由表2可见,与‘纯水动力学’方案相比(表2),各断面在‘全校正’方案、“校正带动”方案情况下水位、流量预测的确定性系数均有所提高,与‘全校正’方案相比‘非校正断面’的确定性系数在‘校正带动’方案中略低,但仍高于‘纯水动力学’方案计算值.一般来说,随着预测时间的延长,滤波阶段的校正效果在预测阶段会逐渐衰退,趋近于模拟计算的效果^[16].

为了解‘水位校正带动站点’的预测精度变化,图4中展示了长寿、清溪场(‘水位校正带动站点’)、忠县站在预见期内洪峰水位误差的变化.从图4可见,上述3站洪峰水位误差随预见期时段的延长而趋于一个定值,该值为模拟计算情况下相应时刻的洪峰误差.在‘校正带动’方案中‘水位校正带动站点’清溪场的预测洪峰误差在预见期内还受相邻实测站(长寿、忠县)的影响.

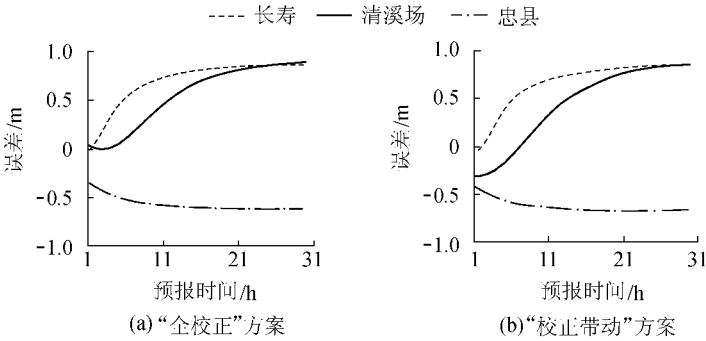


图4 预见期内的洪峰水位误差

Fig.4 Error of peak level during forecast period

同样,流量的预测精度(洪峰流量的相对误差)在预见期内的变化也存在上述规律.以‘流量校正带动站点’万县站为例,考察‘交替校正’方法对洪峰流量预测精度的影响,计算结果如图5所示.预见期内万县洪峰流量的相对误差随预报时间增长而趋于‘纯水动力学’方案计算的洪峰相对误差值,即滤波器校正影响逐渐消除.‘校正带动’方案中相对误差变化趋势还受其上、下游测站(清溪场、奉节)的校正影响.在对数次洪水过程的计算中也得到了类似的结论.由此以数值试验的方式验证了卡尔曼滤波技术在单一河道预测计算中的有效性.

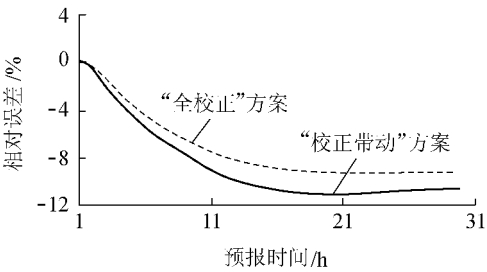


图5 预见期内万县洪峰流量相对误差

Fig.5 Relative error of peak flow during the forecast period in Wanxian

3 结 语

本文数值试验和定性分析表明,将卡尔曼滤波技术应用于水动力学洪水预报模型没有破坏模型的稳定性.考虑到水位、流量相互影响及相互依赖性,本文提出了‘交替校正’方法,即针对不同类型状态量分别建立滤波器方程,进行交替滤波计算以达到不同状态量之间的协同变化.通过‘交替校正’使实测站的校正影响到了全河道其他断面,‘非校正断面’也获得了一定的校正影响.初步试验成果显示该方法可行,可以应用于水动力学模型的实时洪水预报校正系统.

参考文献：

[1] 王船海,李光炽.流域洪水模拟[J].水利学报,1996(3):44-50.

[2] 谈佩文,王船海,顾大辛,等.淮河中游洪水演进模型[J].水科学进展,1996(2):124-129.

[3] MADSEN H,BUTTS M B,KHU S T,et al. Data assimilation in rainfall-runoff forecasting[C]//Hydroinformatics 2000,4th International Conference on Hydroinformatics,Cedar Rapids,Iowa,USA,23-27 July. Washington,D. C. 2000:1-8.

[4] 周轶,菅浩然,李致家,等.基于递推最小二乘改进算法的洪水预报模型研究[J].河海大学学报:自然科学版,2007,35(1):77-80.

[5] 瞿思敏,包为民,石朋,等.AR模式误差修正方程参数抗差估计[J].河海大学学报:自然科学版,2003,31(5):497-500.

[6] 沈凤麟,叶中付,钱玉美.信号统计分析与处理[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2001.

[7] CHIU C L. Applications of kalman filter to hydrology,hydraulics and water resources[M].Pittsburgh,Pa.,USA:University of Pittsburgh Press,1978:459-471.

[8] WERNER M,REGGIANI P,ROO A D,et al. Flood forecasting and warning at the river basin and at the European scale[J]. Natural Hazards,2005,36:25-42.

[9] A modeling system for rivers and channels reference manual[M].Copenhagen,Denmark:DHI Software,2004:401-410.

[10] RANDY D,CHIU C L,YU W,et al. Uncertainties in modeling and forecasting for miagara river[J]. Journal of Hydraulic Engineering,1993,119(11):1231-1250.

[11] 葛守西,程海云,李玉荣.水动力学模型卡尔曼滤波实时校正技术[J].水利学报,2005,36(6):687-693.

[12] 宋文尧,张牙.卡尔曼滤波[M].北京:科学出版社,1991.

[13] 朱海,莫军.水下导航信息融合技术[M].北京:国防工业出版社,2002:80-81.

[14] CHOW V T,MAIDMENT D R,MAYS L W. Applied Hydrology[M].New York:McGraw-Hill,1988.

[15] 王船海,李光炽.流域洪水模拟[J].水利学报,1996,27(3):44-50.

[16] TOTH E,BRATH A,MONTANARI A. Comparison of short-term rainfall prediction models for real-time flood forecasting[J]. J Hydrol,2000,239:132-147.

Application of Kalman filter technique in real-time flood forecasting

WANG Chuan-hai¹, WU Xiao-ling¹, ZHOU Quan²

- (1. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering,
Hohai University, Nanjing 210098, China ;
2. Pudong New Area Hydrology Bureau, Shanghai 201208, China)

Abstract :Based on the Kalman filter, a technique applied in the real-time updating of flood forecasting, an alternate updating method was developed. Two Kalman filter equations of state, one for water level and one for discharge, were established and calculated alternately, and the different state variables in the filter calculation were updated jointly. A case study in part of the main stream of the Yangtze River indicates that the proposed method would help maintain the stability of hydrodynamic models for single rivers through local updating, and it is practical and effective in improving the accuracy of real-time forecasting.

Key words :real-time flood forecasting ; Kalman filter ; hydrodynamic model ; alternate updating method