

一类随机微分方程欧拉格式的收敛性

王 新 朱永忠

(河海大学理学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :为进一步研究标量自治随机微分方程的数值解 ,给出了求解方程的欧拉格式 ,证明了方程的偏移系数和扩散系数均满足全局 Lipschitz 条件时的收敛性 ,并求出了局部收敛阶和均方强收敛阶 .证明过程中放宽了限制条件 ,也得到了与系数满足全局 Lipschitz 条件和线性增长条件时相同的收敛阶 .

关键词 随机微分方程 ;欧拉法 ;收敛阶 ;全局 Lipschitz 条件

中图分类号 :O211.63 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2008)03-0427-03

一般情况下随机微分方程的解析解是不易得出的 ,数值方法的构造显得非常重要 ,多数情况下是将随机微分方程离散化为差分方程 ,通过构造迭代格式对收敛性和稳定性进行研究^[1-10].本文在文献[3]的基础上 ,适当放宽限制条件 ,用不同的方法证明了标量自治随机微分方程的系数满足全局 Lipschitz 条件时的收敛性 .

1 欧拉格式

考虑标量自治随机微分方程

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))du(t) \tag{1}$$

其中 , $x(0) = x_0, t \in [0, T], u(t)$ 为标准维纳过程 , $f(x), g(x)$ 均为 $[0, T]$ 上的连续可测函数 ,且满足全局 Lipschitz 条件 ,即存在常数 L ,使得

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad |g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \tag{2}$$

根据文献[4]中给出的非线性随机微分方程的欧拉格式可给出式(1)的欧拉迭代格式为

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n)h + g(x_n)\sqrt{h}\xi_n \tag{3}$$

其中 , $h = \frac{T}{N}$ 为固定步长 ,令 $\xi_n = u(t_{n+1}) - u(t_n)$,当 $i \neq j$ 时 , ξ_i 与 ξ_j 相互独立 ,并且 $\sqrt{h}\xi_i \sim N(0, 1)$.

定义 1 当 $x_n = x(t_n)$ 时 , $\tilde{x}_{n+1} = x(t_n) + f(x(t_n))h + g(x(t_n))\sqrt{h}\xi_n$,称 $\delta_{n+1} = x(t_{n+1}) - \tilde{x}_{n+1}$, $\epsilon_n = x(t_n) - x_n$ 分别为此数值方法的局部截断误差和整体误差 .

定义 2 若存在常数 $C > 0$ (C 不依赖于 h) ,当 $h \rightarrow 0$ 时 ,有

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} |E(\delta_{n+1})| \leq Ch^{p_1} \quad \max_{0 \leq n \leq N-1} (E|\delta_{n+1}|^2)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{p_2} \quad \max_{0 \leq n \leq N} (E|\epsilon_n|^2)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^p$$

则称此数值算法在均值意义上的局部收敛阶为 p_1 ,均方意义上的局部收敛阶为 p_2 ,均方强收敛阶为 p .

2 数值方法的收敛性

定理 1 当方程(1)的系数 $f(x), g(x)$ 满足条件(2)时 ,对于数值方法格式(3)的局部收敛阶为 : $p_1 = 2$, $p_2 = 1$,并且当 $g(x(t)) \equiv g(t)$ 时 ,整体强收敛阶为 $p = 1$.

证明 a. 先证 $p_1 = 2$.

$$\delta_{n+1} = x(t_{n+1}) - \tilde{x}_{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(x(s)) - f(x(t_n))]ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [g(x(s)) - g(x(t_n))]du(s) \tag{4}$$

根据式(2)及维纳过程的性质^[5-6]有

$$\begin{aligned}
|E(\delta_{n+1})| &\leq \left| E \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(x(s)) - f(x(t_n))] ds \right| \leq \\
L \left| E \int_{t_n}^{t_{n+1}} [x(s) - x(t_n)] ds \right| &\leq L \left| E \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\int_{t_n}^s f(x(\tau)) d\tau + \int_{t_n}^s g(x(\tau)) du(\tau) \right] ds \right| \leq \\
LE \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^s |f(x(\tau))| d\tau ds &\leq \frac{1}{2} h^2 LM_1
\end{aligned} \quad (5)$$

其中 $M_1 = \max_{0 \leq t \leq T} E|f(x(t))|$ 取 $C_1 = \frac{1}{2} LM_1$, $|E(\delta_{n+1})| \leq C_1 h$ (C_1 不依赖于 h , $h \rightarrow 0$), 证得 $p_1 = 2$.

b. 再证 $p_2 = 1$. 根据式(2)和式(4)及维纳过程的性质^[5-6], 可知

$$\begin{aligned}
E|\delta_{n+1}|^2 &\leq 2E \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(x(s)) - f(x(t_n))] ds \right\}^2 + 2E \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} [g(x(s)) - g(x(t_n))] du(s) \right\}^2 \leq \\
2EL^2 \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} |x(s) - x(t_n)| ds \right]^2 &+ 2E \int_{t_n}^{t_{n+1}} [g(x(s)) - g(x(t_n))]^2 ds \leq \\
2EL^2 h \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} |x(s) - x(t_n)|^2 ds \right] &+ 2EL^2 \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} |x(s) - x(t_n)|^2 ds \right] \leq \\
(2h + 1)EL^2 \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} |x(s) - x(t_n)|^2 ds \right]
\end{aligned}$$

根据式(4)及 Hölder 不等式可知

$$\begin{aligned}
E|x(s) - x(t_n)|^2 &\leq 2E|x(s) - \tilde{x}(s)|^2 + 2E|\tilde{x}(s) - x(t_n)|^2 \leq \\
2E|\delta_n(s)|^2 + 4E|f(x(t_n))|^2 (s - t_n)^2 &+ 4E|f(x(t_n))|^2 (s - t_n)
\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{x}(s) = x(t_n) + f(x(t_n))(s - t_n) + g(x(t_n))(u(s) - u(t_n))$$

令

$$M_2 = \max_{0 \leq t \leq T} \{E|f(x(t_n))|^2, E|g(x(t_n))|^2\}$$

则

$$\begin{aligned}
E|\delta_{n+1}|^2 &\leq (2h + 1)L^2 \left[2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} E|\delta_n(s)|^2 ds + 4M_2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_n)^2 ds + 4M_2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_n) ds \right] \leq \\
(2h + 1)L^2 \left[2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} E|\delta_n(s)|^2 ds &+ \frac{4}{3} h^3 M_2 + 2M_2 h^2 \right] = \\
(2h + 1)L^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} E|\delta_n(s)|^2 ds &+ (2h + 1) \left(\frac{2}{3} h + 1 \right) h^2 L^2 M_2
\end{aligned}$$

根据 Gronwall 不等式有

$$\begin{aligned}
E|\delta_{n+1}|^2 &\leq (2h + 1) \left(\frac{2}{3} h + 1 \right) h^2 L^2 M_2 + \\
(2h + 1)L^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{(2h+1)L^2(t_{n+1}-s)} &(2h + 1) \left(\frac{2}{3} h + 1 \right) h^2 L^2 M_2 ds \leq C_2 h^2 \\
(C_2 \text{ 不依赖于 } h, h \rightarrow 0)
\end{aligned} \quad (6)$$

证得 $p_2 = 1$.

c. 最后证明当 $g(x(t)) \equiv g(t)$ 时 $p = 1$. 首先引入以下定理:

定理 2^[9] 对于标量自治随机微分方程(5), 当 $h \rightarrow 0$ 且 $\varepsilon_0 = 0$ 时, 若 $\max_{0 \leq n \leq N} (E|\varepsilon_{n+1}|) = O(h^{p_3})$,

$\max_{0 \leq n \leq N} (E|\varepsilon_n|^2) = O(h^{p_4})$ 那么就有 $p_4 = 2p_3$.

$$\text{证明} \quad \varepsilon_{n+1} = x(t_{n+1}) - x_{n+1} = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x(s)) ds +$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t) du(s) - x_n - f(x_n)h - g(t_n)\sqrt{h}\xi_n = \varepsilon_n + \delta_{n+1} + [f(x(t_n)) - f(x_n)]h$$

由式(2)和式(5)可知:

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq |\varepsilon_n| + |\delta_{n+1}| + |f(x(t_n)) - f(x_n)|h \leq |\varepsilon_n| + |\delta_{n+1}| + |x(t_n) - x_n|Lh \leq (1 + Lh)|\varepsilon_n| + |\delta_{n+1}|$$

用数学归纳法可知 ,当 $\varepsilon_0 = 0$, $h \rightarrow 0$ 时

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq (1 + Lh)^{n+1} |\varepsilon_0| + \frac{\max_{0 \leq n \leq N-1} |\delta_{n+1}|}{Lh} [(1 + Lh)^n - 1] \leq \frac{\max_{0 \leq n \leq N-1} |\delta_{n+1}|}{Lh} [(1 + Lh)^n - 1]$$

那么由式 (5) 可知 :

$$E|\varepsilon_{n+1}| \leq \frac{Ch^2}{Lh} [(1 + Lh)^n - 1] \leq \frac{Ch^2}{Lh} (e^{LT} - 1) = O(h)$$

因此 $p_3 = 1$,根据定理 2 知 $p_4 = 2$,则存在不依赖于 h 的常数 C_4 ,使得 $\max_{0 \leq n \leq N} (E|\varepsilon_n|^2)^{\frac{1}{2}} \leq C_4 h$,证得 $p = 1$.

在文献 [3] 中证明了方程系数既满足 Lipschitz 条件又满足线性增长条件时 ,定理 1 的结论是成立的 ,本文证明了方程系数只满足全局 Lipschitz 条件时也具有相同的结论 ,说明此方法更具有普遍性 .

参考文献 :

- [1] 田增锋 ,魏跃春 ,胡良剑 .随机微分方程 Euler 法的均方稳定性和指数稳定性[J].自然杂志 ,2002 ,24(6) :369-370.
- [2] 刘早清 ,陆云霞 .一类随机微分方程的稳定性[J].应用数学 ,2006(19) :782-786.
- [3] 朱霞 .求解随机微分方程的欧拉法的收敛性[J].华中科技大学学报 :自然科学版 ,2003 ,31(3) :114-116.
- [4] 郭小林 .随机微分方程欧拉格式算法分析[J].大学数学 ,2006 ,22(3) :95-99.
- [5] 张柄根 ,赵玉芝 .科学与工程中的随机微分方程[M].北京 :海洋出版社 ,1980.
- [6] 朱霞 .几类随机数值方法的稳定性与收敛性[D].武汉 :华中科技大学 ,2004.
- [7] SLOMINSKI L. Euler 's approximations of solutions of SDES with reflection boundary[J]. Stochastic Processes and Their Applications , 2001 ,94 :317-337.
- [8] ZHOU Li-qun. Mean square convergence of the composite Euler method for a linear stochastic differential delay equation[J]. 黑龙江大学自然科学学报 ,2006 ,22(6) :326-335.
- [9] SAITO Y ,MITSUI T. Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations[J]. SIAM J Numer Anal ,1996 ,33 :2254-2267.
- [10] KLEODEN P E ,PLATEN E ,SCHURZ H. Numerical solution of stochastic differential equations[M]. Berlin :Spring-Verlag ,1992.

Convergence of the Euler scheme for a class of stochastic differential equations

WANG Xin , ZHU Yong-zhong
(College of Sciences , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract : The Euler scheme for the scalar autonomous stochastic differential equations is presented in order to research the numerical solution of the equations . It is proved that the equations are convergent when the deviation coefficient and diffusion coefficient satisfy the global Lipschitz condition . The local convergence order and the mean square strong convergence order are presented as well . The solution process is carried out under relaxed definite conditions , but it also has the same convergence order when the coefficients of the equations satisfy the global Lipschitz condition and the linear growth condition .

Key words : stochastic differential equations ; Euler method ; convergence order ; global Lipschitz condition