

一类随机微分方程 Runge-Kutta 方法的指数稳定性

庞立君 朱永忠

(河海大学理学院,江苏 南京 210098)

摘要:为进一步研究随机微分方程的稳定性,给出了随机微分方程的二级 Runge-Kutta 方法的算法格式,研究了二级显式随机 Runge-Kutta 方法的均方稳定和指数稳定的条件,并证明了对于线性检验方程,均方稳定性和指数稳定性的关系.

关键词:随机微分方程;Runge-Kutta 方法;均方稳定性;指数稳定性;线性检验方程.

中图分类号: O211.63 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-198X(2008)03-0430-03

随着随机微分方程数值解法的发展,随机微分方程稳定性的研究也引起了广泛的关注. Runge-Kutta 方法用于求解常微分方程是经典的问题,但研究随机 Runge-Kutta 方法求解随机微分方程则是近几年的事情,自从 1982 年 Rumelin^[1]首次把随机 Runge-Kutta 方法用于求解随机微分方程以来, Saito 等^[2-3]讨论了随机微分方程的各种稳定性, Burrage 等^[4-7]构造了多种求解随机微分方程的 Runge-Kutta 方法并讨论了它们的稳定性,但研究随机微分方程的稳定性时主要是针对均方稳定性,本文将讨论二级随机 Runge-Kutta 方法的指数稳定性.

1 预备知识

依照不同的随机积分的定义,随机微分方程可分别表示为

$$dy = f(t, y)dt + g(t, y)du(t) \quad (1)$$

$$dy = \tilde{f}(t, y)dt + g(t, y) \circ du(t) \quad (2)$$

其中 $\tilde{f}(t, y) = f(t, y) - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial y}(t, y)$

式(1)即为 Ito 型随机微分方程,式(2)为 Stratonovich 型随机微分方程.

在不同的积分规则下,2 种形式的方程具有相同的解,因此只需对其中一种形式求解即可,本文只针对 Stratonovich 型随机微分方程讨论. 自治标量随机微分方程形式为

$$dy(t) = a(t, y)dt + b(t, y) \circ du(t) \quad (3)$$

其中, $u(t)$ 是标准 Wiener 过程,函数 $a(t, y)$, $b(t, y)$ 分别为漂移系数和扩散系数,一般讨论式(3)的特殊形式

$$dy = aydt + by \circ du(t) \quad (4)$$

其中 $a, b \in \mathbb{C}$, $u(t)$ 是标准 Wiener 过程,方程(4)也称为线性检验方程.

类似于常微分方程数值方法的研究,为了研究随机微分方程数值方法的性质,一般对随机微分方程(4)应用 Runge-Kutta 方法求解时,得到迭代式

$$y_{n+1} = R(h, a, b, J)y_n \quad (5)$$

在本文中,主要考虑二级显式随机 Runge-Kutta 方法,到现在为止,构造的均方稳定性较好的二级显式随机 Runge-Kutta 方法中,有 Heun 方法^[2]、Platen 方法^[2]、Burrage 方法^[3]和 Burrage 方法^[2]. 以下研究以 Heun 方法为例(其他类似),其 Butcher 点阵如图 1 所示.

	0	0	0	0
	1	0	1	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

图 1 Heun 的点阵

Fig.1 The method of Heun

2 随机微分方程的指数稳定性

关于随机微分方程的稳定性, Saito 等^[8]研究了随机微分方程的 T-稳定性,田增峰等^[9]就 Euler 方法讨论

了指数稳定性,王洪珂^[10]给出了指数稳定的理论证明,下面针对 Runge-Kutta 方法讨论其指数稳定性.为了讨论随机微分方程的稳定性,首先引入下面的定义^[2]:

定义 1 对形如 $y_{n+1} = R(h, a, b, J)y_n$ 的数值方程,如果 $R_1 = E(|R(h, a, b, J)|^2) < 1$,则称它是均方稳定的,并且称 $R_1(h, a, b)$ 为均方稳定函数.

2001 年,Higham 等^[3]提出了指数稳定的定义:

定义 2 对于一个给定的步长 h ,一个数值方法用于解随机微分方程得到其离散解 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$,如果存在 2 个正常数 r 和 N ,使得:

$$E|y_n|^2 \leq NE|y_0|^2 e^{-nh} \quad \forall n \geq 0 \quad (6)$$

则称此数值方法(对于此随机微分方程)是(均方意义下)指数稳定的.

由均方稳定的定义,可以得到如下定理:

定理 1 Heun 方法用于解线性检验方程时,均方稳定的充要条件是:

$$R_1 = \left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}p^2 + 3p + 2\right)q^2 + \frac{3}{4}q^4 < 1$$

其中 $p = ah$, $q = b\sqrt{h}$.

证明 将 Heun 方法应用到线性随机微分方程(4)得

$$Y_1 = y_n$$

$$Y_2 = y_n + hf(Y_1) + J_1 g(Y_1) = y_n + ah y_n + b J_1 y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{1}{2}f(Y_1) + \frac{1}{2}f(Y_2) \right] + J_1 \left[\frac{1}{2}g(Y_1) + \frac{1}{2}g(Y_2) \right] =$$

$$\left[\left(1 + ah + \frac{1}{2}a^2 h^2\right) + (abh + b)J_1 + \frac{1}{2}b^2 J_1^2 \right] y_n$$

设 $p = ah$, $q = b\sqrt{h}$, $J_1^1 = \frac{J_1}{\sqrt{h}} \sim N(0, 1)$, 则

$$y_{n+1} = \left[\left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right) + (pq + q)J_1^1 + \frac{1}{2}q^2 J_1^1{}^2 \right] y_n \quad (7)$$

对迭代式(7)两端求模方,由于 J_1^1 和 y_n 独立,且 $J_1^1 \sim N(0, 1)$, 所以得

$$|y_{n+1}|^2 = \left[\left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right)^2 + (pq + q)^2 J_1^1{}^2 + \frac{1}{4}q^4 J_1^1{}^4 + 2 \left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right)(pq + q)J_1^1 + \right.$$

$$\left. q^2 \left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right)(J_1^1{}^2 + q^2(pq + q)J_1^1{}^2) \right] |y_n|^2$$

对上式两端取期望得

$$E(|y_{n+1}|^2) = \left[\left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}p^2 + 3p + 2\right)q^2 + \frac{3}{4}q^4 \right] E(|y_n|^2) = R_1 E(|y_n|^2) \quad (8)$$

其中

$$R_1 = \left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}p^2 + 3p + 2\right)q^2 + \frac{3}{4}q^4$$

关于式(8)期望值的计算,用到以下公式: $E(J_1^1) = 0$, $E(J_1^1{}^2) = 1$, $E(J_1^1{}^3) = 0$, $E(J_1^1{}^4) = 3$, 所以由均方稳定的定义得,Heun 方法用于解线性检验方程时,均方稳定的充要条件是:

$$R_1 = \left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}p^2 + 3p + 2\right)q^2 + \frac{3}{4}q^4 < 1$$

由均方稳定性和指数稳定性的定义,得到如下定理:

定理 2 如果 Heun 方法对于方程(4)是指数稳定的,则一定是均方稳定的.

证明 由式(8)迭代可得 $E(|y_n|^2) = R_1^n E(|y_0|^2)$, 又因为 Heun 方法是指数稳定的,即存在正数 r 和 N ,使得

$$E|y_n|^2 \leq NE|y_0|^2 e^{-nh} \quad \forall n \geq 0 \quad (9)$$

所以 $R_1^n E(|y_0|^2) \leq NE|y_0|^2 e^{-nh}$, 即 $R_1^n \leq Ne^{-nh}$.

因为方程(9)是对任意 n 成立,取 $n = \left\lceil \frac{\ln N}{rh} \right\rceil + 1$, 则 $R_1^n \leq Ne^{-nh} = Ne^{-rh} \left\lceil \frac{\ln N}{rh} \right\rceil + 1 < 1$, 即 $R_1 < 1$. 证毕.

由定理2又可得如下定理:

定理3 Heun方法用于解线性检验方程时指数稳定的充要条件是

$$R_1 = \left(1 + p + \frac{1}{2}p^2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}p^2 + 3p + 2\right)q^2 + \frac{3}{4}q^4 < 1$$

其中 $p = ah$, $q = b\sqrt{h}$.

证明 (a)必要性由定理2可得.

(b)充分性. 若 $R_1 < 1$, 则对于任意满足 $R_1 < 1$ 的步长 h 取 $N = 1$, $r = -\frac{1}{h}\ln R_1$ 则有

$$E|y_n|^2 = R_1^n E|y_0|^2 \leqslant NE|y_0|^2 e^{-nh} \quad \forall n \geqslant 0 \quad (10)$$

充分性得证. 综上所述定理成立.

由定理2和定理3可得:

定理4 对于线性检验方程(4), Heun方法的均方稳定性和指数稳定性是完全一致的.

以上只是就 Heun 方法的讨论, 对于 Platen 方法、Burrage 方法1和 Burrage 方法2也可得出同样的结论. 随之可以推广: 对于随机微分方程的二级显式随机 Runge-Kutta 方法, 都可以得出相同的结论. 还可以推广到三级(四级和五级)显式 Runge-Kutta 方法.

参考文献:

- [1] RUMELIN W. Numerical treatment of stochastic differential equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1982, 19: 604-613.
- [2] SAITO Y, MITSUI T. Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1996, 33: 2254-2267.
- [3] HIGHAM D J. Mean-square and asymptotic stability of the stochastic theta method[J]. SIAM J Numer Anal, 2000, 38: 753-769.
- [4] BURRAGE P M. Runge-Kutta methods for stochastic differential equations[D]. Brisbane, Australia: the University of Queensland, 1999.
- [5] TIAN T H, BURRAGE K. Two-stage stochastic Runge-Kutta methods for stochastic differential equations[J]. BIT, 2002, 42: 625-643.
- [6] BURRAGE K, BURRAGE P M. High strong order explicit Runge-Kutta methods for stochastic ordinary differential equations[J]. Appl Numer Math, 1996, 22: 81-101.
- [7] BURRAGE K, BURRAGE P M. Order conditions of stochastic Runge-Kutta methods by B-series[J]. SIAM J Numer Anal, 2000, 38: 1626-1646.
- [8] SAITO Y, MITSUI T. T-stability of numerical scheme for stochastic differential equations[J]. World Sci Ser Appl Anal, 1993(2): 333-344.
- [9] 田增峰, 魏跃春, 胡良剑. 随机微分方程 Euler 法的均方稳定性和指数稳定性[J]. 自然杂志, 2002, 24: 369-370.
- [10] 王洪珂. 微分方程的指数稳定性[J]. 大学数学, 2006, 22(1): 75-79.

Exponential stability of Runge-Kutta methods for a class of stochastic differential equations

PANG Li-jun, ZHU Yong-zhong

(College of Sciences, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: In order to research the stability of stochastic differential equations, the two-step Runge-Kutta methods for solving these equations are presented, and the mean square stability and exponential stability conditions of the methods are discussed. The relationship between the mean square stability and exponential stability for linear test equations is also provided.

Key words: stochastic differential equation; Runge-Kutta methods; mean square stability; exponential stability; linear test equation