

实时校正中系统噪声均值的空间分布

吴晓玲,王船海,向小华

(河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室,江苏 南京 210098)

摘要 利用四点线性隐格式对圣维南方程组进行离散和线性化处理,建立了以水位和流量作为状态量的卡尔曼滤波状态方程,并结合相应的量测方程,进行了水动力学实时校正计算.针对预测阶段系统噪声均值的空间分布问题,提出了把卡尔曼滤波技术中的增益矩阵应用于系统噪声均值的空间分布,以改善原方程系统干扰矩阵形式的设想.验证结果表明,此方法对提高预报精度有明显帮助.

关键词 卡尔曼滤波;实时校正;系统噪声均值;空间分布

中图分类号 P338 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2008)04-0448-04

水动力学模型洪水预报分为 2 个阶段:校正阶段和预报阶段^[1-3].为不使误差累积,需要利用实测数据对预报的状态量(水位、流量)进行校正更新.在实时洪水预报中,可通过实时校正来提高预报精度^[4-6].洪水预报中的系统噪声一般只能通过对实测资料的统计得到,而对于大多数无实测值的河道断面来说,则无法直接统计其系统噪声.由于洪水预报中系统噪声均值对预报精度的影响较大^[7],本文主要研究如何在整个河道中分布系统噪声均值,才能使非实测站断面也能有较好的预报精度的问题.

1 基于水动力学模型的实时校正技术

描述河道水流运动的圣维南方程组为

$$\begin{cases} B \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial Z}{\partial x} + gA \frac{1}{K^2} \frac{Q}{V_x} = qV_x \end{cases} \quad (1)$$

式中: q ——旁侧入流单宽流量; Q, A, B, Z ——河道断面流量、过水面积、河宽和水位; V_x ——旁侧入流流速在干流水流方向上的分量,一般为 0; K ——流量模数; α ——动量校正系数; g ——重力加速度; x ——距离; t ——时间.

用四点线性隐格式^[8-9]对圣维南方程组(1)进行离散得到状态方程

$$X_{k+1} = \Phi_{k+1|k} X_k + \Psi_{k+1|k} U_k + \Gamma_{k+1|k} w_k \quad (k \geq 0) \quad (2)$$

式中: k ——计算时间; X_k —— k 时刻系统状态量(水位、流量)向量; U_k —— k 时刻系统输入项(包含边界条件和旁侧入流等)向量; w_k ——综合反映 k 时刻河道概化、系统输入项的系统噪声向量; $\Phi_{k+1|k}, \Psi_{k+1|k}$ ——状态转移矩阵和输入矩阵; $\Gamma_{k+1|k}$ ——系统噪声分布矩阵.

实测水位及流量所组成的量测方程为

$$Y_{k+1} = H_{k+1} X_{k+1} + v_{k+1} \quad (k \geq 0) \quad (3)$$

式中: Y_{k+1} —— k 时刻的量测(水位、流量)向量; H_{k+1} ——从状态量到量测量的映射关系矩阵; v_{k+1} ——量测噪声向量,一般均值为 0,方差为 R .

本文通过离散水动力学方程分别建立状态方程和量测方程,应用卡尔曼滤波技术^[7]对状态量(水位和流量)进行校正和预报.一般来讲,卡尔曼滤波状态方程中的系统噪声 w_k 是零均值的白噪声,而水动力学中的

系统噪声一般是有偏的,即非白噪声序列.系统噪声与量测噪声的统计特点为

$$E\mathbf{w}_k = \bar{\mathbf{w}}_k \quad E\mathbf{v}_k = \bar{\mathbf{v}}_k \quad \text{Cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j) = \boldsymbol{\Omega}_k \delta_{kj} \quad \text{Cov}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j) = \mathbf{R}_k \delta_{kj} \quad \text{Cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_j) = \mathbf{0}$$

式中: δ_{kj} ——克罗内克函数; $\bar{\mathbf{w}}_k$ ——系统噪声均值向量; $\boldsymbol{\Omega}_k$ ——系统噪声方差矩阵; $\mathbf{R}_k$ ——量测噪声方差矩阵.

设初始状态的统计特性为

$$E\mathbf{X}_0 = \boldsymbol{\mu}_0 \quad \text{Var}(\mathbf{X}_0) = E\{(\mathbf{X}_0 - \boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{X}_0 - \boldsymbol{\mu}_0)^T\} = \mathbf{P}_0 \quad \text{Cov}(\mathbf{X}_0, \mathbf{w}_k) = \mathbf{0} \quad \text{Cov}(\mathbf{X}_0, \mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$$

式中: $\boldsymbol{\mu}_0$ ——初始状态量均值向量; $\mathbf{P}_0$ ——初始方差矩阵; $\mathbf{X}_0$ 与 $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$ 都不相关.

相应的滤波器递推公式为

预测

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1|k} = \boldsymbol{\Phi}_{k+1|k} \hat{\mathbf{X}}_k + \boldsymbol{\Psi}_{k+1|k} \mathbf{U}_k + \boldsymbol{\Gamma}_{k+1|k} \bar{\mathbf{w}}_k \tag{4}$$

状态预测误差协方差阵

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \boldsymbol{\Phi}_{k+1|k} \mathbf{P}_{k|k} \boldsymbol{\Phi}_{k+1|k}^T + \boldsymbol{\Gamma}_{k+1|k} \boldsymbol{\Omega}_k \boldsymbol{\Gamma}_{k+1|k}^T \tag{5}$$

增益矩阵

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} \tag{6}$$

滤波

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1} = \hat{\mathbf{X}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{Y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{X}}_{k+1|k}) \tag{7}$$

状态滤波误差协方差阵

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k} \tag{8}$$

式中 $\mathbf{I}$ 为单位阵.由式(4)可见,参与模型预测的干扰项为系统噪声均值,向量 $\bar{\mathbf{w}}_k$ 由 $\boldsymbol{\Gamma}_{k+1|k}$ 变换后也只在实测站断面影响模型预报.

2 模型噪声均值的空间分布

2.1 卡尔曼滤波增益矩阵的性质

由式(6)可见,增益矩阵是以状态量的误差协方差阵极小为原则建立起来的.在滤波器的递推公式中,增益矩阵反映了计算模型对量测噪声和系统噪声的信任程度.增益矩阵的形式反映了新息与附近点之间的相关关系,即体现了误差的空间分布特性^[10].由式(6)可见, $\mathbf{R}_{k+1}$ 增大时, $\mathbf{K}_{k+1}$ 变小,也就是说,如果量测噪声大,则增益应该取得小一些,才能减弱量测噪声的影响.当 $\mathbf{P}_0$ 或 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 变小,或两者都变小时,由式(5)和 $\mathbf{P}_{k+1|k}$ 也会变小,从而 $\mathbf{K}_{k+1}$ 也相应地变小.因为 $\mathbf{P}_0$ 小说明初值估计得好, $\boldsymbol{\Omega}_k$ 变小表明状态转移的随机波动小,这时新加进的量测值对状态预测的校正效果减弱,增益变小.直观地看, $\mathbf{K}_{k+1}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 成正比,而与 $\mathbf{R}_{k+1}$ 成反比.

2.2 模型噪声均值空间分布方法比较

在滤波器预测过程中参与对状态量校正的系统噪声均值,一般只能在有实测站的位置上才能统计得到.为了使非实测站的断面也能参与系统噪声均值的校正,以及在整条河道上充分利用实测站的系统噪声均值资源,做出如下4种系统噪声分布矩阵形式(图1)的假定.

第1种类型:不分布($\boldsymbol{\Gamma}_1$).假定系统噪声均值只在实测站位置不为0,而在其他非实测站断面一律为0,且实测站的系统误差对其他断面没有影响.这种分布的具体形式为

$$\boldsymbol{\Gamma}_1 = \boldsymbol{\Gamma}_{k+1|k}$$

由此可知,原有的系统噪声分布矩阵不变,即实测断面位置元素为“1”,其他为“0”.

第2种类型:三角形分布($\boldsymbol{\Gamma}_2$).按到实测站断面的距离线性地分配相邻断面之间的系统噪声均值.随着非实测断面与实测站断面之间距离的增加,非实测断面的系统噪声均值将不断降低.这种分布的具体形式为

$$\boldsymbol{\Gamma}_2 = \left(\frac{l_i}{l_s}, 1, \frac{L-l_i}{L-l_s} \right)^T \quad (0 \leq i \leq n, 0 \leq s \leq n)$$

式中: s ——实测站所在的断面序号; l_i, l_s, L ——第 i 号断面及第 s 号断面到上边界的河长以及总河长.

第3种类型:常数分布($\boldsymbol{\Gamma}_3$).假定相邻断面之间的系统噪声均值相同,对于有2个及2个以上实测站的河道,该实测断面的系统噪声均值只影响其上游或下游各断面.这种分布的具体形式为

$$\boldsymbol{\Gamma}_3 = (1, 1, 1)^T$$

即所有断面都采用实测站统计得到的系统噪声均值.

第4种类型:增益矩阵分布($\boldsymbol{\Gamma}_4$).采用水位和流量滤波器的增益矩阵形式,按增益矩阵中实测断面所对

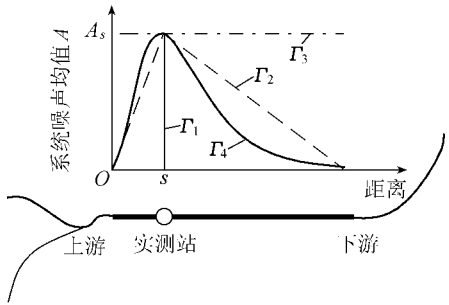


图 1 系统噪声均值的空间分布
Fig.1 Spatial distribution of mean value of system noise

应的列向量形式,把实测站统计得到的系统噪声均值分配到其他断面上.这种分布的具体形式为

$$\Gamma_4 = K_k \times \Gamma_{k+1|k}$$

式中 K_k 为 k 时刻的卡尔曼滤波增益矩阵.

比较上述 4 种系统噪声均值的空间分布方法后,就可以找出对提高非实测站断面预报精度最有效的方法.

3 应用实例

三峡区间流域气候温和湿润,具有显著的亚热带特征,多年平均气温为 17.3°C ,相对湿度为 80%,降水量为 1228.7 mm,水面蒸发量为 1705.7 mm,年径流系数为 0.63.

寸滩至万县的干流河段为长江的主要河段,位于长江中上游三峡区间流域内.该河段对三峡水库的入库洪水有重要的控制作用.该河段长约 321 km,其间有寸滩、清溪场、万县 3 个水文站,长寿、忠县 2 个水位站.计算以寸滩的入流流量作为上边界,乌江武隆支流作为旁侧入流,万县水位作为下边界,如图 2 所示.

本文以寸滩、长寿、忠县的实测水位作为卡尔曼滤波水位校正的依据,以清溪场的实测流量作为流量校正的依据.为了考察不同的系统噪声均值空间分布方法对非实测断面预报精度的影响,清溪场的实测水位、万县的实测流量不作为校正的依据.考察三峡蓄水 135 m 后,寸滩至万县河段 2004 年 9 月大洪水的预报情况,内容包括 8 月 20 日~10 月 8 日之间的洪水过程拟合情况以及 040907 洪峰误差情况.对于洪水过程拟合情况,分别比较误差均方根 s 以及确定性系数.对于洪峰拟合情况,主要比较洪峰水位误差和洪峰流量的相对误差.由表 1 和表 2 可知,按增益矩阵分布系统噪声均值的方法对提高实测站断面以及非实测断面的预报精度帮助最大.



图 2 河道测站分布
Fig.2 Distribution of observation stations along the river

表 1 洪峰水位误差及洪峰流量相对误差 6h 预报结果

Table 1 Error of flood peak water level and relative error of flood peak discharge during a 6-hour forecasting period							
站 名	洪号	洪峰水位误差/m			洪峰流量相对误差/%		
		Γ_1	Γ_2	Γ_4	Γ_1	Γ_2	Γ_4
寸 滩	040907	0.23	0.24	0.15			
长 寿	040907	0.30	0.31	0.22			
清溪场	040908	0.86	1.27	0.07	2.69	0.27	-0.06
忠 县	040908	0.34	0.23	0.18			
万 县	040908				1.34	-0.52	0.01

注:由于常数分布系统噪声均值的方法会导致计算结果的不稳定,比较时未将该方法列入.

表 2 2004 年 8 月 20 日 20 时~10 月 8 日 20 时洪水过程 6h 预报结果

站名		Table 2 Forecast results of the flood process from 8 00 p.m. on August 20 to 8 00 p.m. on October 8, 2004 in 6-hour periods											
		水位过程						流量过程					
		s/m			确定性系数			s/m			确定性系数		
		Γ_1	Γ_2	Γ_4	Γ_1	Γ_2	Γ_4	Γ_1	Γ_2	Γ_4	Γ_1	Γ_2	Γ_4
		寸滩	0.20	0.14	0.14	1.00	1.00	1.00					
		长寿	0.32	0.16	0.15	0.99	1.00	1.00					
		清溪场	1.85	1.76	0.63	0.78	0.80	0.97	852.74	669.76	587.05	0.99	1.00
		忠县	0.12	0.10	0.09	1.00	1.00	1.00					
		万县							2126.7	2713.8	1856.6	0.97	0.94

注: $s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}$, 其中 N 为样本个数, y_i 为观测值, $\hat{y}_i$ 为模型计算值.

4 结果与讨论

a. 在预见期 $6\text{h}^{[1]}$ 的预报计算中,按 Γ_4 的系统噪声均值空间分布方式进行预报,其洪峰水位误差及洪峰流量相对误差均较不分布、三角形分布方式有明显的降低.从确定性系数和 s 指标的对比结果可以看出,按 Γ_4 的方式分布系统噪声均值,预报结果最好.

b. 由于计算时将乌江武隆支流作为河段区间均匀旁侧入流,相对于流量来讲,清溪场站的水位所受影响较大,采用 Γ_1 分布形式时清溪场站的水位预报精度很差.采用 Γ_2 和 Γ_4 分布形式时,清溪场站水位、流量的预报精度均有所提高.

c. 如图 3 所示,按 Γ_4 的系统噪声均值空间分布形式的预报过程与实测过程吻合得很好.由此可知,本文所提出的按增益矩阵空间分布系统噪声均值的方法对提高实时洪水预报精度有很大的作用.

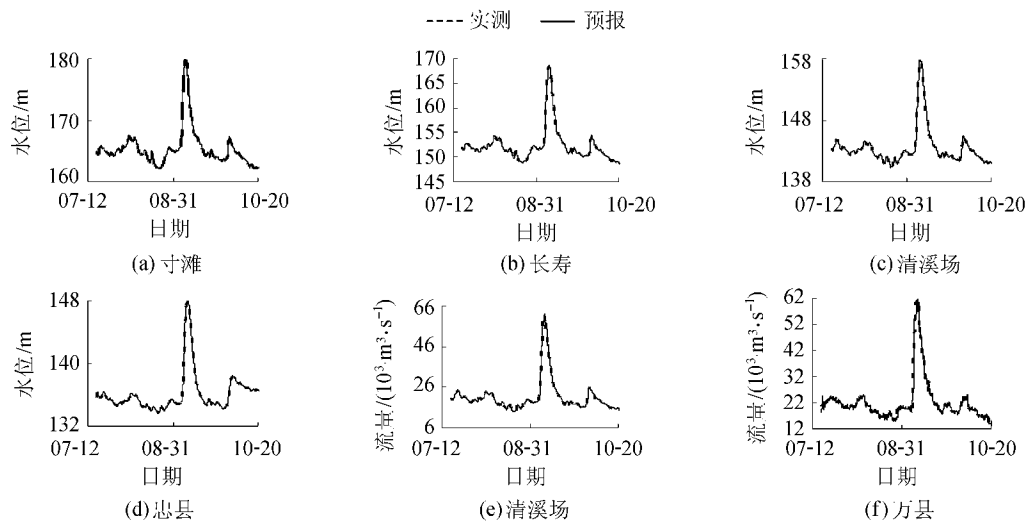


图 3 6h 预报水位、流量与实测值的比较

Fig.3 Comparison of forecasted water stage hydrographs and discharge hydrographs with observations in 6-hour periods

参考文献：

[1] HSUA M H ,FUA J C ,LIUB W C .Flood routing with real-time stage correction method for flash flood forecasting in the Tanshui River , Taiwan[J].Journal of Hydrology 2003 283 :267-280.

[2] CHOW V T .Open-channel hydraulics[M]. New York : McGraw-Hill ,1973 .

[3] 朱琰 .太湖流域实时洪水预报调度系统研究[D].南京 河海大学 2003 .

[4] 周轶 ,菅浩然 ,李致家 ,等 .基于递推最小二乘改进算法的洪水预报模型研究[J].河海大学学报 :自然科学版 ,2007 35(1) : 77-80 .

[5] 瞿思敏 ,包为民 ,石朋 ,等 .AR 模式误差修正方程参数抗差估计[J].河海大学学报 :自然科学版 ,2003 31(5) :497-500 .

[6] WERNER M ,REGGIANI P ,ROO A ,et al .Flood forecasting and warning at the river basin and at the european scale[J]. Natural Hazards 2005 36 :25-42 .

[7] 宋文尧 ,张牙 .卡尔曼滤波[M].北京 科学出版社 ,1991 .

[8] 李光炽 ,王船海 .大型河网水流模拟的矩阵标识法[J].河海大学学报 ,1995 23(1) :36-43 .

[9] 王船海 ,李光炽 .流域洪水模拟[J].水利学报 ,1996(3) :44-50 .

[10] MADSEN H ,SKOTNER C .Adaptive state updating in real-time river flow forecasting-a combined filtering and error forecasting procedure [J].Journal of Hydrology 2005 308 :302-312 .

[11] TOTH E ,BRATH A ,MONTANARI A .Comparison of short-term rainfall prediction models for real-time flood forecasting[J]. Journal of Hydrology 2000 239 :132-147 .

Spatial distribution of mean value of system noise in real-time updating

WU Xiao-ling , WANG Chuan-hai , XIANG Xiao-hua

(State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract : By adopting the four-point linear implicit scheme to discretize and linearize Saint-Venant equations , the state equations of the Kalman filter were set up with water level and discharge as state variables . Based on the state equations and corresponding measurement equations , real-time updating of the hydrodynamic model was realized by use of the Kalman filter . In regard to the spatial distribution of the mean value of system noise during the forecasting stage , a method of applying the gain matrix of the Kalman filter was proposed for improving the primitive forecast model . The results show that the proposed method helps to increase forecast accuracy .

Key words : Kalman filter ; real-time updating ; mean value of system noise ; gain matrix