

GAMMA 格式及 DATE 方法在 SIMPLE 算法中的应用

向小华¹,苏长城²,王船海¹,吴晓玲¹

(1.河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室,江苏 南京 210098;
2.江苏省水利厅规划办公室,江苏 南京 210029)

摘要 为了提高 N-S 方程数值计算的精度并解决压力-速度的耦合问题,将 GAMMA 格式、DATE 方法与 SIMPLE 算法相结合,得到了一种高精度非结构同位网格下的 SIMPLE 算法.该算法用 GAMMA 格式离散对流项,用 DATE 方法处理方程求解过程中压力-速度的耦合问题,可以弥补传统动量插值法不能处理强非线性压力场的不足,保证对流项离散的稳定性及高精度特性.

关键词 N-S 方程;GAMMA 格式;DATE 方法;SIMPLE 算法;非结构同位网格

中图分类号 TV131.4 **文献标识码** A **文章编号** 1000-1980(2008)04-0471-04

SIMPLE 算法是描述不可压缩流体运动的常用数值方法,其精度主要取决于 2 个方面:高分辨率对流项的离散格式、压力与速度的隐式耦合处理.

近 20 年来,流体数值计算的精度得到极大提高,产生了如 MUSCL 格式、WENO 格式、ROE 格式和 SMART 等高精度格式.为了解决压力-速度的耦合问题,Date^[1]提出了完全压力校正方法.该方法克服了动量插值法^[2]不适用于强非线性压力场的缺陷.

由于非结构同位网格能很好地适应计算边界^[3-7],本文用高精度 NVD 格式——GAMMA 格式^[8]离散对流项,用非正交补偿法^[9]离散扩散项,用 DATE 方法建立同位网格下的压力校正方程,得到了一种高精度非结构同位网格下的 SIMPLE 算法.

1 控制方程及其离散

二维非恒定 N-S 方程可用下面的通用微分方程来表示:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\phi U) = \nabla \cdot (\mu \nabla \phi) + S_\phi \tag{1}$$

式中: ρ ——流体密度; t ——时间项; $\phi = u, v$ (u, v 分别为 x, y 方向的流速); μ ——黏性系数; $U = ui + vj$ ——速度矢量; S_ϕ ——源项,压力项包括在源项中.

应用散度定理,在图 1 所示的控制体 P_aP_bA 上对方程(1)进行积分:

$$\frac{(\rho\phi) - (\rho\phi)^0}{\Delta t} \Delta V + \sum_{e=1}^{N_e} (\rho\phi AU \cdot n)_e = \sum_{e=1}^{N_e} [A(\mu \nabla \phi) \cdot n]_e + S_\phi \Delta V \tag{2}$$

式中: ΔV ——控制体体积,二维情况下表示控制体单元面积; e ——控制体界面编号; n_e ——控制体界面 e 的单位外法线向量; A_e —— e 界面的面积; N_e ——控制体的面数.等号左边第 2 项为对流项,右边第 1 项为扩散项,第 2 项为源项.改变源项 S_ϕ 就可以得到不同形式的控制方程^[10].

1.1 对流项的离散

在结构网格 NVD 格式的基础上,文献[8]给出了一种既简单又便于应用的非结构同位网格下的离散格式——GAMMA 格式.按照文献[8]的定义,

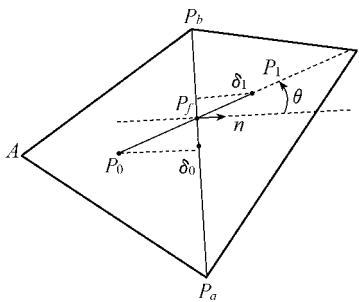


图 1 控制体界面
Fig.1 Control volume face

$$\bar{\phi}_{P_0} = 1 - \frac{\phi_{P_1} - \phi_{P_0}}{2(\nabla\phi)_{P_0} \cdot P_0P_1} \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{\bar{\phi}_{P_0}}{\beta_m} \quad \beta_m = 0.2 \quad (4)$$

式中: $\bar{\phi}_{P_0}$ ——标准变量; $(\nabla\phi)_{P_0}$ ——变量 ϕ 在 P_0 点的梯度, 用高斯积分计算; ϕ_{P_0}, ϕ_{P_1} ——控制体节点 P_0, P_1 的待求流速; P_0P_1 ——点 P_0 到 P_1 的向量; γ ——一、二阶混合的权重系数; β_m ——分界点值. 根据文献[8]的建议, $\beta_m \in (0.1, 0.5)$, 本文取 $\beta_m = 0.2$. 界面插值系数

$$f_x = \frac{\Delta P_f P_1}{\Delta P_0 P_1} \quad (5)$$

式中: P_f —— P_0P_1 连线与 P_aP_b 面的交点; $\Delta P_f P_1$ —— $P_f P_1$ 的长度; $\Delta P_0 P_1$ —— P_0P_1 的长度. 依照 GAMMA 格式, 得到界面上的值 ϕ_f 为

$$\phi_f = \begin{cases} f_x \phi_{P_0} + (1 - f_x) \phi_{P_1} & \bar{\phi}_{P_0} \in [\beta_m, 1) \\ [1 - \gamma(1 - f_x)] \phi_{P_0} + \gamma(1 - f_x) \phi_{P_1} & \bar{\phi}_{P_0} \in (0, \beta_m) \\ \phi_{P_0} & \bar{\phi}_{P_0} \notin (0, 1) \end{cases} \quad (6)$$

1.2 扩散项的离散

为了处理非正交带来的误差, 采用文献[9]提出的非正交补偿法. 该方法通过控制体节点计算主要的扩散项, 用界面自身的 2 个节点修正非正交项. 根据图 1, 该离散方法可用下式来表示:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{P_e} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\phi_{P_1} - \phi_{P_0}}{\delta_1 + \delta_0} + \frac{\phi_a - \phi_b}{\Delta P_a P_b} \tan \theta \quad (7)$$

式中: δ_0, δ_1 —— P_0, P_1 点到界面的距离; ϕ_a, ϕ_b —— P_a, P_b 点的流速, 利用相邻控制体加权平均计算. 式(7)右端第 1 项为正交时的离散扩散项, 第 2 项为修正项, 以显式格式放入源项中. 正交时 $\tan \theta = 0$, 方程右端第 2 项消失.

至此, 将式(6)和式(7)代入式(2)就可以得到离散的线性动量方程组, 通过计算就可以得到设定压力场下的速度场.

1.3 压力校正方程的建立

Date 方法的提出, 克服了动量插值法在强非线性压力场下的缺陷. 文献[11]介绍了 Date 方法的原理, 论证了该方法的优越性, 并导出了由 Date 方法确定的压力修正方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[D_x \frac{\partial p'}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[D_y \frac{\partial p'}{\partial y} \right] = \frac{\partial (\rho \bar{u}^n)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \bar{v}^n)}{\partial y} \quad (8)$$

$$p' = p'_m + p'_s \quad (9)$$

$$p'_s = \frac{1}{2} (p^n - \bar{p}^n) \quad (10)$$

$$D_x = \frac{\rho \Delta V}{AP_e^{uf}} \quad D_y = \frac{\rho \Delta V}{AP_e^{vf}} \quad (11)$$

式中: p'_m ——实际压力修正值; p'_s ——“光滑”压力修正值; p^n —— n 时刻的压力值; $\bar{p}^n$ —— n 时刻多点平均压力值; $\bar{u}^n, \bar{v}^n$ —— n 时刻的多点平均速度; AP_e^{uf}, AP_e^{vf} ——界面上 u, v 动量方程的主对角线系数.

应用散度定理, 在控制体 P_aP_bA 上对式(8)进行积分:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \left[\frac{\rho (\Delta y_e)^2}{AP_e^{uf}} + \frac{\rho (\Delta x_e)^2}{AP_e^{vf}} \right] (p'_e - p'_0) \right\} = \sum_{e=1}^{N_e} (\rho \bar{u}_{fe}^n n_x + \rho \bar{v}_{fe}^n n_y) A_{fe} \quad (12)$$

式中: n_x, n_y ——控制体表面的单位外法线向量在 x, y 方向的分量; A_{fe} ——表面面积; p'_e ——与 e 界面相连的外控制体压力修正值; p'_0 ——当前控制体的压力修正值; $\bar{u}_{fe}^n, \bar{v}_{fe}^n$ —— n 时刻界面上的多点平均速度; $\Delta x, \Delta y$ ——控制体界面在 x, y 方向的投影长度.

先求解方程(12)得 p' , 再由方程(9), (10)求出实际压力修正值 p'_m , 最后由式(13)对速度和压力进行修正, 这样就完成了一个时间步长的计算.

$$\begin{cases} p^{n+1} = p^n + \beta p'_m \\ u^{n+1} = u^n + \alpha u' & u' = - \sum_{e=1}^{N_e} \left[\frac{\rho(\Delta y)_e}{AP_e^u} (p'_{me} - p'_{m0}) \right] \\ v^{n+1} = v^n + \alpha v' & v' = - \sum_{e=1}^{N_e} \left[\frac{\rho(\Delta x)_e}{AP_e^v} (p'_{me} - p'_{m0}) \right] \end{cases} \quad (13)$$

式中： α, β ——速度和压力计算的松弛因子； AP^u, AP^v ——控制体 u, v 动量方程的主对角线系数。

1.4 压力边界条件

方程(2)和(12)的求解会分别用到边界上的压力和压力校正值. 边界上的压力和压力校正值都可以通过外推方法求得. 根据 Date 方法的要求, 边界上的压力应满足如下条件：

$$\frac{\partial p'_s}{\partial n} = 0 \qquad \frac{\partial p'}{\partial n} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \qquad (14)$$

2 算 例

通过顶盖驱动流和后台阶流 2 个算例对本文给出的计算方法进行验证.

2.1 顶盖驱动流

选取直角的顶盖驱动流动作为算例, 控制体的布设采用非结构三角形网格, 共布设了 2 113 个节点、4 096 个三角形网格. 本文计算结果与文献[12]计算结果的对比如图 2 所示. 由图 2 可知, 2 种方法的计算结果吻合得较好.

2.2 后台阶流

后台阶流的计算条件如图 3 所示, 计算区域平面放置, 忽略了重力的影响. 图 3 中： x_1 为主环流的重新附着点； x_2, x_3 分别为上壁分离点和重新附着点； h 为进口段宽度, 台阶处断面宽度突然扩大为 $2h$, 进口段长度为 $4h$. 为了减小出口边界的影响, 较宽部分长度取为 $45h$. 雷诺数定义为 $u_0 D / \gamma, D = 2h, u_0$ 为一时间步内的平均速度, γ 为运动黏度. 控制体布设采用非结构三角形网格, 共布设了 4 991 个节点、9 617 个三角形网格. 入口段和台阶附近一段

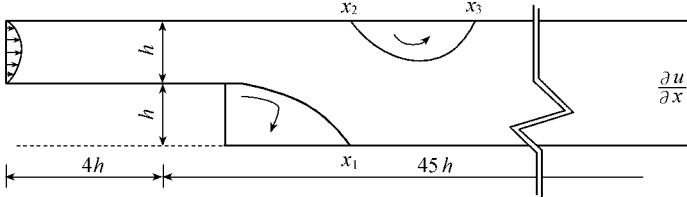


图 3 后台阶流示意图

Fig.3 Sketch of backward-facing step flow

区域内的网格适当加密.

在高雷诺数时, 强负压力会导致上壁流体分离. 如图 3 所示, x_2 到 x_3 的分离段长度可以反映数值方法的精度. 当 $Re > 400$ 时, 分离区的长度受到三维流动的影响, 二维模拟结果存在较大偏差[13]. 对比结果(图 4)表明: 当 $Re < 400$ 时, 计算结果与实测值[14]吻合得较好; 当 $Re > 400$ 时, 流态受到三维流动的影响, 计算结果与实测值[14]偏差较大, 与文献[15]的数值模拟结果比较吻合.

3 结 论

- a. 本文的计算结果表明, 将 Date 的压力校正法应用于非结构网格, 并结合高精度的 GAMMA 离散格式求解 N-S 方程是可行的.
- b. 本文仅论证了所提方法的可行性, 而该方法在复杂计算条件下的适应性还需做进一步的探讨.

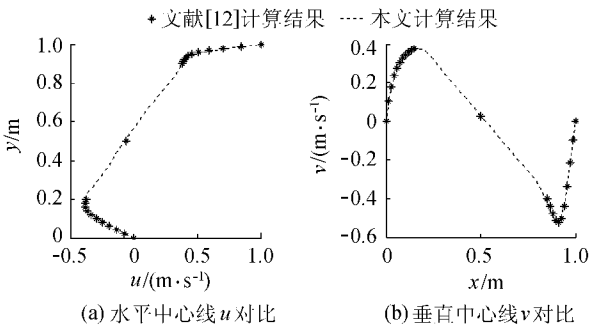


图 2 雷诺数 $Re = 1000$ 时的顶盖驱动流计算结果对比

Fig.2 Comparison of calculated results for driven cavity flow with $Re = 1000$

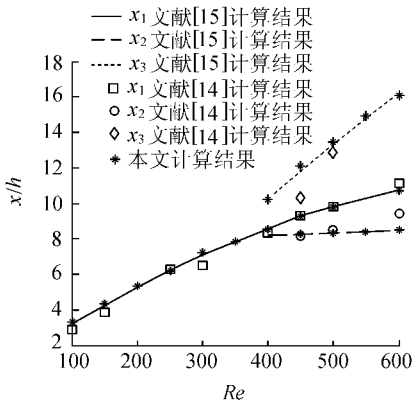


图 4 后台阶流计算结果对比

Fig.4 Comparison of calculated results for backward-facing step flow

c. 由于非结构网格比较复杂,各种高精度格式与动量校正方法相结合的最优效果值得研究.

参考文献:

- [1] DATE A W. Complete pressure correction algorithm for solution of incompressible Navier-Stokes equations on non-staggered grid[J]. Numerical Heat Transfer: Part B, 1996, 29(4): 441-458.
- [2] RHIE C M, CHOW W L. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edgeseperation[J]. AIAA Journal, 1983, 21: 1525-1532.
- [3] 赖锡军,汪德罐,傅源方.非结构同位网格 SIMPLE 类算法收敛性能比较[J].空气动力学学报, 2004, 22(3): 289-294.
- [4] 王志东,赖锡军,汪德罐.非正交同位网格中的 SIMPLE 算法[J].河海大学学报:自然科学版, 2003, 31(5): 509-512.
- [5] 柏威,鄂学全.基于非结构化同位网格的 SIMPLE 算法[J].计算力学学报, 2003, 20(6): 702-710.
- [6] 邢领航,华祖林,褚克坚,等.非结构网格下两步压力校正算法的潮流模拟[J].河海大学学报:自然科学版, 2007, 35(5): 505-509.
- [7] 夏云峰,薛鸿超.非正交曲线同位网格三维水动力数值模型[J].河海大学学报:自然科学版, 2002, 30(6): 74-78.
- [8] JASAK H, WELLER H G, GOSMAN A D. High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes[J]. Int Journal for Numerical Methods in Fluids, 1999, 31: 431-449.
- [9] DONGJOO K, HAECHEON C. A second-order time-accurate finite volume method for unsteady incompressible flow on hybrid unstructured grids[J]. Journal of Computational Physics, 2000, 162: 411-428.
- [10] 陶文铨.数值传热学[M].2版.西安:西安交通大学出版社, 2001.
- [11] DATE A W. Fluid dynamical view of pressure checkerboarding problem and smoothing pressure correction on meshes with collocated variables[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2003, 46: 4885-4898.
- [12] ERTURK E, CORKE T C, GOKCOL C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers[J]. Int Journal for Numerical Methods in Fluids, 2005, 48: 747-774.
- [13] WILLIAMS P T, BAKER A J. Incompressible computational fluid dynamics and the continuity constraint methods for the three-dimensional Navier-Stokes equations[J]. Numerical Heat Transfer: Part B, 1996, 29(2): 137-273.
- [14] ARMALY B F, DURST F, PEREIRA J C F. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow[J]. J of Fluid Mechanics, 1983, 127: 473-496.
- [15] BARTON I E. A numerical study of flow over a confined backward-facing step[J]. Int Journal for Numerical Methods in Fluids, 1995, 21: 653-665.

Application of GAMMA scheme and DATE method in SIMPLE algorithm

XIANG Xiao-hua¹, SU Chang-cheng², WANG Chuan-hai¹, WU Xiao-ling¹

(1. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering,
Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. Planning Office of Water Resources Department of Jiangsu Province, Nanjing 210098, China)

Abstract: In order to improve the accuracy and deal with the pressure-velocity coupling in the numerical solution of N-S equations, a high accuracy SIMPLE algorithm is developed for unstructured collocated grids through an integration with the GAMMA scheme and DATE method. The convective flux is evaluated using the GAMMA scheme for the stability and high accuracy of the convection term. The pressure-velocity coupling is solved with the DATE method, which overcomes the defect of the traditional momentum interpolation method in strong nonlinear pressure fields.

Key words: N-S equations; GAMMA scheme; DATE method; SIMPLE algorithm; unstructured collocated grid