

含夹杂非均质材料的扩展有限元数值模拟

应宗权 杜成斌 程 丽

(河海大学土木工程学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :为了验证含夹杂非均质材料扩展有限元数值模拟的有效性 ,分别用扩展有限元法和传统有限元法模拟计算了一块含多个圆形夹杂的单轴受拉的板的位移场 ,并对模拟结果进行了对比分析 .结果表明 ,通过水平集函数来表示夹杂材料的几何界面 ,利用富集函数来改进被界面切割的单元所在结点的形函数 ,网格剖分无需考虑内部边界 ,可大大减少数值模拟前处理的工作量 .

关键词 :含夹杂非均质材料 ;扩展有限元法 ;水平集法

中图分类号 :O242 ;TU599 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2008)04-0546-04

有限元法是一种基于网格单元的数值计算方法 .该方法要求单元的形函数连续且材料性能不能突变 .因此 ,利用有限元法处理夹杂问题 ,单元的边界必须位于夹杂与基体的界面处 .而如果采用 Belytschko 等提出的扩展有限元法进行数值模拟 ,就不需要严格按照结构内的几何或物理界面的边界进行网格剖分^[1] .为了验证扩展有限元法在含夹杂非均质材料数值模拟方面的有效性 ,本文分别用扩展有限元法和传统有限元法模拟计算了一块含多个圆形夹杂的单轴受拉的板的位移场 ,并对模拟结果进行了对比分析 .

1 水平集法

水平集法是一种可以跟踪界面的数值方法^[2-3] .该法将界面函数表示成了比其高一维的水平集函数 .例如 ,二维平面 R^2 中一维移动界面 $\Gamma(t) \subset R^2$ 可表示成

$$\Gamma(t) = \{x \in R^2 : \varphi(x,t) = 0\} \tag{1}$$

式中 : $\varphi(x,t)$ ——水平集函数 ; x ——考察点的坐标 ; t ——时间 .对于夹杂问题 ,由于界面静止 ,水平集函数不随时间变化 .例如 ,圆形夹杂的水平集函数可表示为

$$\varphi(x,0) = \min_{i=1,2,\dots,n_c} \{\|x - x_c^i\| - r_c^i\} \tag{2}$$

式中 : n_c ——圆形夹杂数 ; x_c^i ——第 i 个孔洞的中心坐标 ; r_c^i ——第 i 个孔洞的半径 .

2 扩展有限元法

2.1 位移模式的构造

为了在传统有限元法的位移模式中考虑材料界面对位移分布的影响 ,需要对界面周围的结点自由度进行修正 .设考察区域被分割成有限个单元 ,结点有 m 个 ,结点的集合为 M ,则任意一点的位移逼近为^[3-4]

$$u(x) = \sum_{n_I \in M} N_I(x) u_I + \sum_{n_J \in M^e} N_J(x) \varphi_J(x) a_J \tag{3}$$

式中 : I, J ——单元结点编号 ; $N_I(x), N_J(x)$ ——传统有限元的形函数 ; u_I ——结点位移值 ; $\varphi_J(x)$ ——富集函数 ; a_J ——改进结点的附加自由度 ; M^e ——这些单元所处结点的集合 .富集函数 $\varphi_J(x)$ 用于改进与界面相交单元的结点的位移 .

考察区域中任意一点的水平集函数可通过有限插值方法得到 ,即

$$\varphi(x) = \sum_I N_I(x) \varphi_I \tag{4}$$

φ_I 为 I 结点处水平集函数的值,采用文献 [2] 所选取的富集函数 $\psi(x) = |\varphi(x)|$,则改进单元中任意一点的改进函数为

$$\psi(x) = |\varphi(x)| = \left| \sum_I N(x) \varphi_I \right| \tag{5}$$

2.2 支配方程的建立

类似于传统有限元法,根据虚功原理导出扩展有限元法的支配方程^[3].以结构的结点位移列阵 δ 为基本未知量的扩展有限元整体分析的支配方程为^[5-6]

$$K\delta = R \tag{6}$$

式中: K ——整体劲度矩阵,由单元劲度矩阵 k^e 集合而成; R ——整体荷载列阵,由单元荷载列阵集合而成.单元劲度矩阵

$$k^e = \begin{bmatrix} k_{ij}^{uu} & k_{ij}^{ua} \\ k_{ij}^{au} & k_{ij}^{aa} \end{bmatrix}$$

其中

$$k_{ij}^{rs} = \int_{\Omega} (B_i^r)^T DB_j^s d\Omega \quad (r,s = u,a) \tag{7}$$

而

$$B_i^u = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad B_i^a = \begin{bmatrix} \frac{\chi(N_i\psi)}{\partial x} & 0 & \frac{\chi(N_i\psi)}{\partial x} \\ 0 & \frac{\chi(N_i\psi)}{\partial y} & \frac{\chi(N_i\psi)}{\partial y} \end{bmatrix}^T \tag{8}$$

2.3 应力的计算

按上述方法求出各结点的位移后,可以计算出相应各结点的应力.若单元的结点位移列阵为 δ^e ,弹性矩阵为 D ,应变转换矩阵 B 为

$$B = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4] \tag{9}$$

$$B_i = B_i^u B_i^a = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\chi(N_i\psi)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\chi(N_i\psi)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\chi(N_i\psi)}{\partial y} & \frac{\chi(N_i\psi)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i = 1 \ 2 \ 3 \ 4) \tag{10}$$

则应力分量的表达式为

$$(\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy})^T = DB\delta^e \tag{11}$$

3 数值积分

传统有限元法的每个单元里只能有一种材料,而扩展有限元法由于网格划分时没有考虑材料类型,其一个单元里可以有几种材料.因此,需利用水平集函数 φ 对结点的形函数进行改进.为此,先找出那些结点所在的单元.对于任一单元,如果存在某条边上的 2 个结点 n_l, n_j 使得 $\varphi_l \varphi_j < 0$,可认为该单元与界面相交,这些单元的集合记为 T ,需要改进的结点集 M^e 由集合 T 中所有单元的结点组成.那些 2 条边与界面重合的结点不需要改进,其计算可采用传统有限元法.

对单元刚度矩阵,可采用 2 种不同的积分方法^[3](a)先建立子单元与材料类型间的联系,然后用高斯积分法或其他积分法对每个单元进行积分;(b)先根据 $\varphi(x)$ 的符号确定任一点的材料类型,然后利用高斯求积和辛普森规则或其他规则进行积分.

为了能将第 1 种积分方法应用于二维问题,将与界面相交的单元划分为几个子三角形单元.用水平集函数 φ 确定界面位置.假设单元被界面上的微线段 PQ 分割为 2 部分.其中 P, Q 为线段与单元边的 2 个交点(图 1).对特定边界 $[n_l^e, n_j^e]$ 而言, $\varphi_l^e \varphi_j^e < 0$,则交点 x_p 可由下式确定:

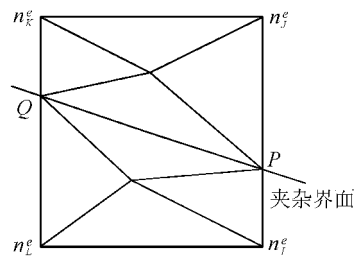


图 1 单元与界面相交示意图
Fig.1 Sketch of an element cut by an interface

$$x_P = x_I^e + \xi(x_J^e - x_I^e) \qquad \xi = -\frac{\varphi_I^e}{(\varphi_J^e - \varphi_I^e)} \qquad (12)$$

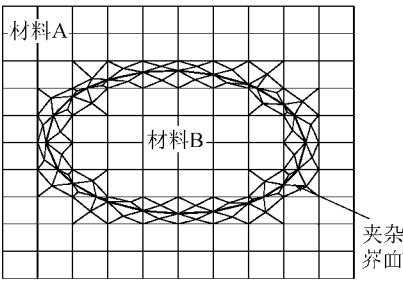


图2 含椭圆夹杂的典型子单元

Fig.2 Partitioning of sub-elements

为了便于积分,将2个子域的形心点分别与该子域内的各个顶点相连,以形成子单元.如果离散后的界面微线段与某单元边界重合,则说明该单元未被分解.夹杂界面切割单元的方式可能有多种,图2所示是一个含椭圆夹杂的典型子单元.

值得指出的是,扩展有限元法的单元分解与网格细分有着本质的区别,主要的区别表现在以下2个方面:

- a. 单元分解的目的是为了数值积分,在离散空间中并不引入额外自由度.
- b. 由于基函数与结点相关联,它们维系在母单元而不是分解得到的子单元上,因而通过分解得到的子三角形单元的形状对扩展有限元计算的结果没有影响.

4 数值算例

对于夹杂随机分布的复合材料,先采用随机投放方式形成夹杂随机分布的计算模型,然后再对各个模型进行网格划分,这样,工作量非常大^[7-10].采用扩展有限元法,网格划分时无需考虑夹杂的具体分布,可利用十分简单的网格进行数值模拟计算.图3所示为一块含多个圆形夹杂(黑色颗粒)的单位厚度板,受竖向均布荷载, $\sigma = 1 \text{ GPa}$.板尺寸为 $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$.圆形夹杂的空间位置及半径在一定条件下随机分布.夹杂的弹性模量 $E = 60 \text{ GPa}$,泊松比 $\nu = 0.2$;基体的弹性常数为 $E = 30 \text{ GPa}$,泊松比 $\nu = 0.25$.

采用扩展有限元法模拟计算时的网格如图4(a)所示(其中圆周为夹杂的几何界面,非网格线),单元总数为10000,结点总数为10201,单元剖分十分简单.采用传统有限元法模拟计算时的网格如图4(b)所示,单元总数为15006,结点总数为15195,单元剖分严格按夹杂边界进行.由图4可以看出,采用扩展有限元法,计算网格极为简单,可以极大地简化数值模拟的前处理工作.

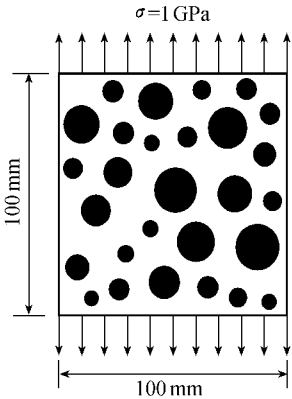
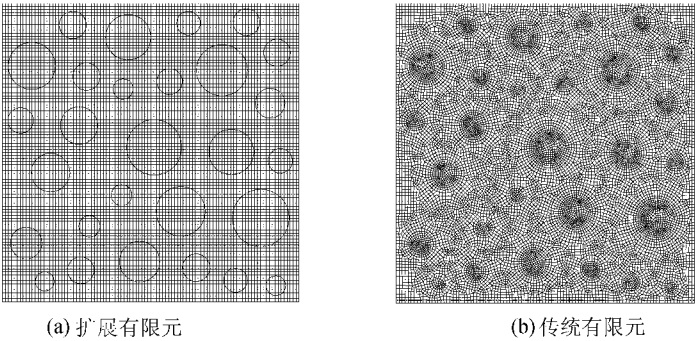


图3 单轴受拉的含圆形夹杂的板

Fig.3 Plate with circular inclusions under uniaxial tension



(a) 扩展有限元

(b) 传统有限元

图4 计算网格

Fig.4 Computational mesh

图5和图6为2种数值方法计算得到的竖向位移等值线.

由图5和图6可以看出,2种数值方法得到的竖向位移等值线基本相同.扩展有限元法和传统有限元法计算得到的板的最大竖向位移分别为 2.996 mm 和 2.912 mm ,两者相差甚微.

5 结论

本文分别用扩展有限元法和传统有限元法模拟计算了一块含多个圆形夹杂的单轴受拉的板的位移场,

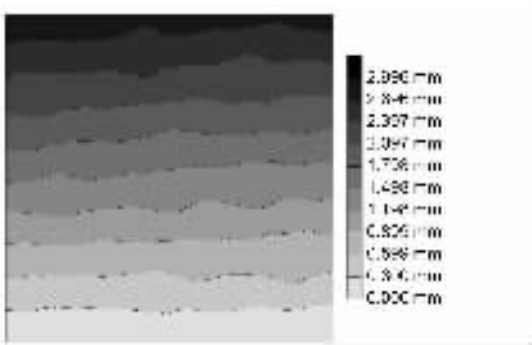


图 5 扩展有限元法计算得到的竖向位移等值线

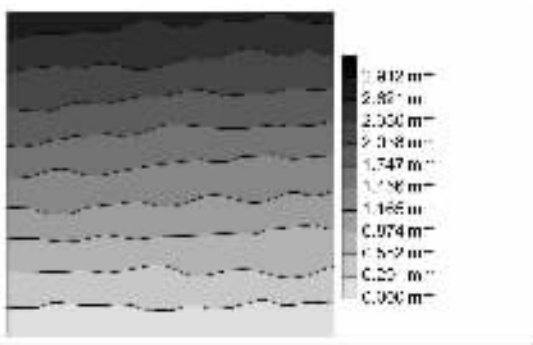


图 6 传统有限元法计算得到的竖向位移等值线

Fig.5 Isolines of vertical displacement obtained by XFEM

Fig.6 Isolines of vertical displacement obtained by FEM

并得到了竖向位移等值线基本相同的结果.这说明 利用水平集函数来表示夹杂边界,在材料界面处构造富集函数,容许单元里有多种材料,只是需要进行单元分解,而无须将计算网格严格按照不同材料的几何边界来划分,因而可以大大加快数值模拟前处理的进度,减少工作量.

参考文献 :

[1] MOES N ,DOLBOW J ,BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering ,1999 46(1): 131-150.

[2] DUFLLOT M. A study of the representation of cracks with level sets[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering , 2007 70(11): 1261-1302.

[3] SUKUMAR N ,CHOPP D L ,MOES N ,et al. Modeling holes and inclusions by level set in the extended finite-element method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 2001 ,190(46/47): 6183-6200.

[4] MOES N ,CLOIREC M ,CARTRAUD P ,et al. A computational approach to handle complex microstructure geometries[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 2003 ,192(28): 3163-3177.

[5] 余天堂. 含裂纹体的数值模拟[J]. 岩土力学与工程学报 2005 24(24) :4434-4439.

[6] 李录贤,王铁军. 扩展有限元(XFEM)及其应用[J]. 力学进展 2005 35(1) 5-20.

[7] WRIGGERS P ,MOFTAH S O. Mesoscale models for concrete : homogenization and damage behavior[J]. Finite Element in Analysis and Design 2006 42(7) :623-636.

[8] DU Cheng-bin ,REN Chao-jun ,YING Zong-quan. Effects of randomness of material parameters on crack failure of concrete[J]. Key Engineering Material 2006 324/325 243-246.

[9] BAZANT Z P ,TABBARA M R ,KAZEMI M T ,et al. Random particle model for fracture of aggregate or fiber composites[J]. Journal of Engineering Mechanics ,1990 ,116(8): 1686-1705.

[10] 应宗权,杜成斌,孙立国. 基于随机骨料数学模型的混凝土弹性模量预测[J]. 水利学报 2007 38(8): 933-937.

Application of extended finite element method
in heterogeneous materials with inclusions

YING Zong-quan , DU Cheng-bin , CHENG Li

(College of Civil Engineering , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract : In order to test the validity of applying the Extended Finite Element Method (XFEM) in heterogeneous material with inclusions , the displacement field of a plate with multi-circular inclusions under uniaxial tension is simulated with both the XFEM method and the finite element method. Comparative analysis of the test results of the two methods is conducted. The results show that , by employing a level set functions to represent the geometric interfaces and adopting the enrichment functions to improve the shape functions of the nodes of the elements cut by the interfaces , the mesh generation in XFEM can be performed easily , without requiring the mesh to conform to the internal boundaries of the inclusions. Thus , the amount of pre-processing work in numerical simulation is greatly reduced.

Key words : heterogeneous material with inclusions ; extended finite element method ; level set method