

基于微分算子样条重建小波变换的方法

孙中喜¹,倪金霞²,邓彩霞³

(1.河海大学理学院,江苏 南京 210098 ;2.南京交通职业技术学院信息工程系,江苏 南京 211188 ;
3.哈尔滨理工大学应用科学学院,黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要 :针对 Mallat 极大模重建小波变换算法没有充分利用信号突变点的不足,提出了一种利用微分算子确定的样条函数重建小波变换的方法,并为 一类广义微分方程的求解提供了新的途径.

关键词 :再生核 ;微分算子样条 ;小波变换

中图分类号 :O175 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2008)04- 0575- 04

在 Mallat 极大模重建小波变换算法^[1]中,为重建小波变换,需构造函数

$$\{g_j(x)\}_{j\in Z}\approx\{W_{2^j}f(x)\}_{j\in Z}\quad x\in[a,b]$$

且满足微分方程

$$-2^{2j}\frac{\mathrm{d}^2g_j(x)}{\mathrm{d}x^2}+g_j(x)=0\quad x\in(x_{i-1},x_i)$$

其解为

$$g_j(x)=\alpha\mathrm{e}^{2^{-j}x}+\beta\mathrm{e}^{-2^{-j}x}\quad x\in(x_{i-1},x_i)$$

这就是 Mallat 极大模算法在区间 (x_{i-1},x_i) $i=2,\dots,n$ 上对 $\{W_{2^j}f(x)\}_{j\in Z}$ 的近似.

由于 Mallat 极大模算法的提出,小波分析在图像边缘检测、奇异点检测等^[2-4]方面得到了应用.所以,利用信号二进小波变换的奇异点,在多尺度上表征和重建小波变换,已成为小波分析的一个重要研究领域.但 Mallat 极大模算法并没有考虑区间端点,为充分利用信号突变点,如果把每个区间端点考虑进去,则转化为如下的广义微分方程:

$$-2^{2j}\frac{\mathrm{d}^2g_j(x)}{\mathrm{d}x^2}+g_j(x)=\sum_{i=1}^n\beta_i\delta(x-x_i)\quad x\in[a,b]\tag{1}$$

式中: $\{\beta_i\}_i^n$ ——一组任意常数; $\{x_i\}_i^n$ ——突变点; n ——突变点个数.所以,重建区间 $[a,b]$ 上的小波变换也就是求解这一广义微分方程.

根据小波变换和再生核的联系,连续小波变换的像空间是再生核空间^[5].本文基于再生核空间,提出了一种利用微分算子确定的样条函数重建小波变换的方法.

1 再生核空间 $H[a,b]$ 中的微分算子样条

1.1 再生核空间 $H[a,b]$

定义 1^[6] 给定区间 $[a,b]$ 上的一个划分 $\pi=\{x_i\}_i^n:a=x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$,及二阶微分算式 $L(D)y=-2^{2j}D^2(y(x))+y(x)$,广义微分方程

$$L(D)y=\sum_{i=1}^n\beta_i\delta(x-x_i)\tag{2}$$

的解称为二阶微分算子样条函数,其全体记为 $S_\pi(L,\pi)$, $\{\beta_i\}_i^n$ 为一组任意常数, $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

定义 2^[7-8] 记 $H[a,b]=\{u(x)|u(x)\text{是}[a,b]\text{上的绝对连续函数},u'(x)\in L[a,b]\}$.

对于 $u(x),v(x)\in H[a,b]$,令内积

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_a^b [2^{-j}u(x)u'(x) + 2^j u'(x)v'(x)] dx \quad (3)$$

取范数为 $\|u\| = \langle u, u \rangle_{H^1}^{1/2}$, 易证 $H^1[a, b]$ 空间关于该范数是完备的^[9], 其再生核为

$$K(x, t) = \frac{1}{2 \sinh 2^{-j}(b-a)} [\cosh 2^{-j}(x+t-b-a) + \cosh 2^{-j}(|x-t|-b+a)] \quad (4)$$

即对于任何 $u(x) \in H^1[a, b]$, 有 $\langle u(x), K(x, t) \rangle_{H^1} = u(t)$.

在再生核空间 $H^1[a, b]$ 中, 由于再生核函数 $K(x, t)$ 满足 $L_x(D)K(x, t) = \delta(x-t)$, 所以有

$$L(D) \left[\sum_{j=1}^n \beta_j K(x, x_j) \right] = \sum_{j=1}^n \beta_j \delta(x - x_j)$$

即

$$\sum_{j=1}^n \beta_j K(x, x_j) \in S_p(L, \pi)$$

1.2 二阶微分算子样条函数的构造

考虑定义 1 给出的二阶微分算子

$$L(D) = -2^{2j}D^2 + I \quad (5)$$

$L(D)$ 的特征方程式为 $L(\lambda) = -2^{2j}\lambda^2 + 1 = 0$, 得 $h(u) = 2^j \sinh(2^{-j}u)$, 于是

$$h(x-t) = 2^j \sinh 2^{-j}(x-t) \cdot (x-t)_+^j$$

令

$$Z_1(t) = h(b-t)$$

$$Z_2(t) = \frac{\partial h(x-t)}{\partial x} \Big|_{x=b} = h^{(-1,0)}(b, t)$$

$$Z_3(t) = \int_a^b h(x, t) dx = h^{(-1,0)}(b, t)$$

因此

$$\begin{cases} Z_1(t) = 2^j \sinh 2^{-j}(b-t) \\ Z_2(t) = \cosh 2^{-j}(b-t) \\ Z_3(t) = 2^2 [\cosh 2^{-j}(b-t) - 1] \end{cases} \quad (6)$$

相应 $L(D)$ 的共轭微分算子为 $L^*(D) = -2^{2j}D^2 + I$, 显然有

$$L^*(D)Z_i(t) = 0 \quad (i=1, 2) \quad L^*(D)Z_3(t) = -2^{2j} \quad (7)$$

下面构造一个二阶差分方程式:

$$L_h^*(Z) = a_i Z(x_i) + b_i Z(x_{i+1}) + c_i Z(x_{i+2}) = 0 \quad (8)$$

要求满足

$$L_h^* Z_1(x_i) = 0 \quad L_h^* Z_2(x_i) = 0 \quad (9)$$

从式(8)(9)消去 a_i, b_i, c_i 得

$$\begin{vmatrix} Z_1(x_i) & Z_1(x_{i+1}) & Z_1(x_{i+2}) \\ Z_2(x_i) & Z_2(x_{i+1}) & Z_2(x_{i+2}) \\ Z_3(x_i) & Z_3(x_{i+1}) & Z_3(x_{i+2}) \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

记式(10)中行列式为 $D \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z \\ x_i & x_{i+1} & x_{i+2} \end{pmatrix}$, 将式(10)两端除以 $D \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ x_i & x_{i+1} & x_{i+2} \end{pmatrix}$, 得到关于 $Z(x_i), Z(x_{i+1}), Z(x_{i+2})$ 的二阶差分方程式

$$\frac{D \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z \\ x_i & x_{i+1} & x_{i+2} \end{pmatrix}}{D \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ x_i & x_{i+1} & x_{i+2} \end{pmatrix}} = 0 \quad (11)$$

显然式(11)便是所求的差分方程式, 利用式(11)可以构造样条函数空间 $S_p(L, \pi)$ 的局部基.

记 $h(x, t)$ 代入式(11)中的 $Z(t)$ 所得函数为 $B_i Z(x), B_i Z(x)$ 的第 2 个下标表示微分算子 $L(D)$ 的阶, 即

$$B_i \varphi(x) = \frac{D \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & g(x, \cdot) \\ x_i & x_{i+1} & x_{i+2} \end{pmatrix}}{D \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ x_i & x_{i+1} & x_{i+2} \end{pmatrix}} \quad a \leq x \leq b$$

将式(6)中的 Z_1, Z_2, Z_3 代入上式,则 $B_i \varphi(x)$ 可以写成

$$B_i \varphi(x) = \frac{h \begin{pmatrix} b & b & x \\ x_i & x_{i+1} & x_{i+2} \end{pmatrix}}{\int_a^b h \begin{pmatrix} b & b & x \\ x_i & x_{i+1} & x_{i+2} \end{pmatrix} dx} \quad (12)$$

其中

$$h \begin{pmatrix} b & b & x \\ x_i & x_{i+1} & x_{i+2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} h(b, x_i) & h(b, x_{i+1}) & h(b, x_{i+2}) \\ h^{(1,0)}(b, x_i) & h^{(1,0)}(b, x_{i+1}) & h^{(1,0)}(b, x_{i+2}) \\ h(x, x_i) & h(x, x_{i+1}) & h(x, x_{i+2}) \end{vmatrix}$$

经计算,得

$$B_i \varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sinh 2^{-j}(x - x_i)}{2[\cosh 2^{-j}(x_{i+1} - x_i) - 1]} & x_i < x \leq x_{i+1} \\ \frac{\sinh 2^{-j}(x_{i+2} - x)}{2[\cosh 2^{-j}(x_{i+2} - x_{i+1}) - 1]} & x_{i+1} < x < x_{i+2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

经验证, $B_i \varphi(x)$ 为满足定义 1 的由微分算式 $L(D) = -2^{2j}D^2 + I$ 定义的二阶微分算子样条函数.

2 利用微分算子样条重建小波变换

引理^[6] 设 $x_0 < a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b < x_{n+1}$,

$$B_i \varphi(x) = \frac{h \begin{pmatrix} x_{n+1} & x_{n+1} & x \\ x_i & x_{i+1} & x_{i+2} \end{pmatrix}}{\int_{x_i}^{x_{i+2}} h \begin{pmatrix} x_{n+1} & x_{n+1} & x \\ x_i & x_{i+1} & x_{i+2} \end{pmatrix} dx} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

则对 $a \leq x \leq b$ 而言, $\{B_i \varphi(x)\}$ 是 $Sp(L, \pi)$ 的二阶微分算子 B 样条基.

定理 设 $\{W_{2^j} f(x)\}_{j \in \mathbb{Z}} \in H^1[a, b]$ 为给定被插函数, $S(f, x) \in Sp(L, \pi) \cap H^1[a, b]$ 为其微分算子样条插值函数,即满足插值条件 $S(f, x) = W_{2^j} f(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则 $H^1[a, b]$ 中的这种微分算子样条插值函数可以唯一地表示成

$$S(f, x) = \sum_{i=1}^n B_i \varphi(x) W_{2^j} f(x_i) \quad x \in [a, b]$$

证明 设 $R(\pi) = \{p(x) \in C[a, b] \mid p(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 的分划 } \pi \text{ 上的每个小区间 } [x_i, x_{i+1}] \text{ 上是 } c_i e^{2^{-j}x} + d_i e^{-2^{-j}x}, c_i, d_i \text{ 为任意常数}\}$, 由文献[10]知 $g_f(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i K(x, x_i)$, 其中 $K(x, x_i) \in R(\pi)$ 所以 $g_f(x) \in R(\pi)$.

另一方面, $S(f, x) = \sum_{i=1}^n B_i \varphi(x) W_{2^j} f(x_i)$, 由于 $B_i \varphi(x) \in R(\pi)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则 $S(f, x) \in R(\pi)$, 因此 $g_f(x) - S(f, x) \in R(\pi)$, 即存在常数 c_i, d_i , 使得

$$g_f(x) - S(f, x) = c_i e^{2^{-j}x} + d_i e^{-2^{-j}x} \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

利用插值条件

$$g_f(x_i) = S(f, x) = W_{2^j} f(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

得方程组

$$\begin{cases} c_i e^{2^{-j}x_i} + d_i e^{-2^{-j}x_i} = 0 \\ c_i e^{2^{-j}x_{i+1}} + d_i e^{-2^{-j}x_{i+1}} = 0 \end{cases}$$

解方程组得 $c_i = d_i = 0$. 故 $g(x) = S(f, x)$, $x \in [a, b]$, 即 $g(x) = \sum_{i=1}^n B_i(x) W_{2^j}(x_i)$.

由定理知, 广义微分方程式(1)的解可表示为 $g(x) = \sum_{i=1}^n B_i(x) W_{2^j}(x_i)$, $x \in [a, b]$, 即为 $\{W_{2^j}(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 的近似解, 也就是尺度 2^j 上的 $\{W_{2^j}(x)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 的重建表达式.

参考文献:

- [1] MALLAT S, HWANG W L. Singularity detection and processing with wavelets[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1992, 38(2): 617-643.
- [2] MALLAT S, ZHONG S. Characterization of signals from multiscale edges[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1992, 38(7): 710-732.
- [3] 马社祥, 刘贵忠, 曾召华. 由信号二进小波变换极值重构信号的样条插值算法[J]. 电子学报, 2001, 29(1): 68-70.
- [4] 屈稳太, 诸静. 基于小波变换的焊缝位置检测新方法[J]. 中国图像图形学报, 2002, 7(12): 1314-1318.
- [5] DAUBECHIES I. Ten lectures on wavelets[M]. Montpellier: Capital City Press, 1992: 11-30.
- [6] 李岳生. 样条与插值[M]. 上海: 上海科技出版社, 1983.
- [7] 邓彩霞, 邓中兴. 再生核空间中样条插值算子与最佳插值逼近算子的一致性[J]. 高等学校计算数学学报, 1995, 17(2): 119-128.
- [8] 邓彩霞, 濮安山, 邓中兴. 再生核空间 W_2^1 中的微分算子样条插值[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2001, 18(4): 10-13.
- [9] 崔明根, 邓中兴. $W_2^1[a, b]$ 空间中的最佳插值逼近算子[J]. 计算数学, 1986, 8(2): 209-216.
- [10] 倪金霞, 邓彩霞, 邢佳. 再生核空间中重构小波变换的一种方法[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2004, 9(5): 92-94.

A method for reconstruction of the wavelet transform based on differential operator spline function

SUN Zhong-xi¹, NI Jin-xia², DENG Cai-xia³

(1. College of Sciences, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. Department of Information Engineering, Nanjing Communications Institute of Technology, Nanjing 211188, China;

3. Applied Science College, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In consideration of the defect in the Mallat reconstruction algorithm of the wavelet transform modulus maxima, a new method for reconstruction of the wavelet transform based on a differential operator spline function is put forward. Furthermore, the theoretic basis is provided for discussing the solution of a kind of generalized differential equation.

Key words: reproducing kernel; differential operator spline; wavelet transform