

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2008.05.026

基于区间参数摄动法的黏弹性区间有限元研究

黄耀英¹,吴中如²,顾璇¹

(1.三峡大学土木水电学院,湖北 宜昌 443002;2.河海大学水利水电工程学院,江苏 南京 210098)

摘要:对线性静力区间有限元应力区间计算方法进行了评述,认为将含有区间参数的高斯点应力在区间参数均值处进行 Taylor 展开,计算得到的应力区间扩张不明显.将区间分析方法应用于黏弹性问题分析,推导了黏弹性问题区间参数摄动法计算公式,研制了相应的黏弹性区间有限元计算程序.通过算例分析认为:采用区间参数摄动法进行黏弹性问题分析是可行的.随着位移均值的增加,位移离差也逐渐增大,位移区间最终随着位移均值的稳定而逐渐趋于稳定.

关键词:不确定性 区间参数 摄动法 黏弹性问题

中图分类号: TU452 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1980(2008)05-0702-05

有限元区间分析模型和随机模型、模糊模型是目前处理不确定性问题的主要方法^[1].有限元区间分析方法是工程分析中某些不确定性参数用区间变量来表示,利用区间数学的方法来进行分析^[1-2],它在统计信息不足以描述不确定性参数的概率分布或隶属函数、工程单元仅提供不确定性参数的区间范围而想获得结构响应的区间范围时就发挥了优势.目前,人们提出了很多将有限元区间分布方法用于工程结构分析的求解方法^[3-9],如截断方法、摄动方法、组合法以及优化方法等.但有限元区间分析方法主要集中于解决一些自由度较少的杆件结构等线弹性问题,而对于比较复杂的、自由度较多的实体结构和非线性问题的研究还较少.将有限元区间分析方法应用于黏弹性问题分析,至今尚未见文献报导.另外,由于在黏弹性问题中,每一时步都需要根据当前时刻的应力和黏性应变来计算下一时刻的黏性应变,现有的文献主要研究区间控制方程的求解,而很少有如何由单元结点位移区间计算单元高斯点应力区间的报导.据此,本文首先对 3 种可能的线性静力区间有限元应力区间计算方法进行比较评述,然后对黏弹性问题区间分析方法进行研究.

1 区间运算性质

性质 1 设 $X_i^l \in I_R, x_i \in X_i^l$ 为任意不相关区间变量, $a_i \in R (i = 1, 2, \cdots, n)$. 令 $y^l = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, 则区间变量 y^l 的均值和离差分别为

$$y^c = \sum_{i=1}^n a_i x_i^c \quad y^r = \sum_{i=1}^n |a_i| x_i^r \tag{1}$$

式中: I_R ——实数区间集合; x_i^c, x_i^r —— $x_i^l (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的均值和离差.

性质 2 设 $X_1^l \in I_R^+$ (或 $X_1^l \in I_R^-$), $x_1^l \in X_1^l$ 为任意的非负 (或非正) 区间变量, $x_2^l \in X_2^l, X_2^l \in I_R$ 为任意的区间变量. 令 $y^l = x_1^l x_2^l$, 则 y^l 的均值和离差分别为

$$\begin{cases} y^c = x_1^c x_2^c \pm x_1^r \min(|x_2^c|, x_2^r) \\ y^r = |x_1^c| x_2^r + x_1^r \max(|x_2^c|, x_2^r) \end{cases} \tag{2}$$

式中: I_R^+, I_R^- ——非负或非正实数区间的集合; x_1^c, x_2^c 和 x_1^r, x_2^r —— x_1^l, x_2^l 的均值和离差. 当 $x_1^c x_2^c \geq 0$ 时, 式(2) $\pm$ 取‘+’号, 否则取‘-’号.

收稿日期: 2008-05-18
基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2002CB412707)
作者简介: 黄耀英(1977—), 男, 湖南郴州人, 讲师, 博士, 主要从事大坝安全监控和数值计算方面的研究.

2 线性静力区间有限元应力区间计算方法

求解线性静力区间有限元控制方程,得到结点位移区间 $u^l = [u^c - u^r, u^c + u^r]$,可计算单元高斯点的应力区间.其计算公式为

$$\sigma^l = D^l B(u^l)^e$$

以下对 3 种可能的线性静力区间有限元应力区间计算方法进行评述.

a. 利用单元结点位移均值和位移离差分别计算单元高斯点应力均值和应力离差,即

$$\sigma^c = DB(u^c)^e|_{P=P^c} \quad \sigma^r = DB(u^r)^e|_{P=P^c} \quad \sigma^l = \sigma^c + |\sigma^r| [-1,1] \tag{3}$$

显然,上述应力区间的计算方法不严谨.

b. 利用单元结点位移均值和位移离差按区间运算性质来计算单元高斯点应力均值和应力离差.例如,对于平面四结点等参单元,高斯点应力计算式^[10]为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{Bmatrix} D_1 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + D_2 \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \\ D_2 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + D_1 \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \\ D_3 \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + D_3 \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \end{Bmatrix} \tag{4}$$

式中, D_1, D_2, D_3 和 u_i, v_i ——区间变量; N_i ——形函数.由于计算式中存在 2 个区间数相乘,可利用区间运算性质 1 和性质 2 来计算.虽然这种计算方法严谨,但由区间运算性质 2 可见,由于离差的计算都取绝对值,所以区间扩张十分显著.

c. 将含有区间参数的高斯点应力在区间参数均值 $P = P^c$ 处进行 Taylor 展开,忽略二阶以上微量,有

$$\sigma(P^l) = \sigma^c + \sum_{i=1}^m \Delta P_i^l \sigma'_i(P^c) = \sigma^c + \Delta \sigma^l \tag{5}$$

$$\sigma^c = D|_{P=P^c} B(u^c)^e \quad \sigma^r = \sum_{i=1}^m \Delta P_i \cdot |\sigma'_i(P^c)| \tag{6}$$

$$\sigma'_i(P^c) = \frac{\partial \sigma}{\partial P_i} \Big|_{P=P^c} = \frac{\partial D}{\partial P_i} \Big|_{P=P^c} B u^c + D \Big|_{P=P^c} B \frac{\partial u}{\partial P_i} \Big|_{P=P^c}$$
$$\frac{\partial u}{\partial P_i} = (K^c)^{-1} \left[\frac{\partial R}{\partial P_i} \Big|_{P=P^c} - \frac{\partial K}{\partial P_i} \Big|_{P=P^c} u^c \right]$$

式中: σ^c, σ^r ——应力均值和应力离差; u^c, u^r ——位移均值和位移离差; $P, P^c, \Delta P$ ——区间参数、区间参数均值和区间参数离差; D ——弹性矩阵; B ——应变转换矩阵; K^c ——在区间参数均值处的区间劲度矩阵; R ——整体节点荷载区间列阵.由计算经验可知,上述方法计算得到的应力区间扩张不明显.本文在计算应力区间时,采用该方法.

3 区间参数摄动法

考虑到不确定性参数 P^l 在小范围变化,令

$$K^c = K(P^c) \quad K'_i(P^c) = \frac{\partial K}{\partial P_i} \Big|_{P=P^c} \quad R^c = R(P^c) \quad R'_i(P^c) = \frac{\partial R}{\partial P_i} \Big|_{P=P^c} \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{7}$$

式中: K^c, R^c ——均值整体劲度矩阵和均值荷载列阵; P^l ——区间参数向量; P^c —— P^l 的均值; m ——区间参数个数.

将含有区间参数的劲度矩阵 $K(P^l)$ 和荷载列阵 $R(P^l)$ 在 $P = P^c$ 处进行 Taylor 展开,忽略二阶及以上微量,可得

$$K(P^l) = K^c + \sum_{i=1}^m \Delta P_i^l K'_i(P^c) = K^c + \Delta K^l \tag{8}$$

$$R(P^l) = R^c + \sum_{i=1}^m \Delta P_i^l R'_i(P^c) = R^c + \Delta R^l \tag{9}$$

式中 ΔP^I 为 P^I 的离差.

由区间有限元控制方程,有

$$(K^c + \Delta K^I)(u^c + \Delta u^I) = (R^c + \Delta R^I) \tag{10}$$

由线性方程的摄动法,有

$$u^c = (K^c)^{-1} R^c \tag{11}$$

$$\Delta u^I = (K^c)^{-1} \Delta R^I - (K^c)^{-1} \Delta K^I u^c = - (K^c)^{-1} (\Delta K^I u^c - \Delta R^I) \tag{12}$$

将 $\Delta R^I, \Delta K^I$ 的表达式代入可得

$$\Delta u^I = - (K^c)^{-1} (\Delta K^I u^c - \Delta R^I) = - (K^c)^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \Delta P_i^I K_i'(P^c) u^c - \sum_{i=1}^m \Delta P_i^I R_i'(P^c) \right) \tag{13}$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^m \Delta P_i | (K^c)^{-1} K_i'(P^c) u^c | + \sum_{i=1}^m \Delta P_i | (K^c)^{-1} R_i'(P^c) | \tag{14}$$

结构静力位移的上下界分别为

$$\underline{u} = u^c - \Delta u \quad \bar{u} = u^c + \Delta u$$

式中 $\underline{u}, \bar{u}, u^c$ 和 Δu 分别为位移区间下界、上界、均值和离差.

由线性方程的摄动法可知,当区间变量的变化范围较大时,有时不能满足摄动法的收敛条件,此时,可采用子区间法^[9]进行处理.

4 黏弹性问题的区间参数摄动法

国内外学者依据工程材料的流变特性,提出了很多的黏弹性模型,如开尔文模型、麦克斯韦尔模型、广义开尔文模型、伯格模型等.为分析问题方便,本文着重对 $n = 1$ 的广义开尔文模型进行区间有限元分析.

4.1 广义开尔文模型

广义开尔文模型由一个弹簧和 n 个开尔文模型串联而成,如图 1 所示.图中 E_0, E_1 为广义开尔文模型的弹性系数, E_0 为弹簧的弹性系数, E_1 为开尔文元件的弹性系数.

由广义开尔文模型的流变规律可知,固体将产生瞬时弹性变形,然后随着时间流变,最终趋于稳定.本文利用这个规律,采用区间参数摄动法先计算瞬时位移均值 u_0^c 和位移离差 u_0^r (由广义开尔文模型的 E_0 产生) 然后计算流变位移均值 u_1^c 和位移离差 u_1^r (由广义开尔文模型的 E_1 产生) 最后将瞬时变形和流变变形相加得到广义开尔文模型最终的位移均值 $u^c = u_0^c + u_1^c$ 和位移离差 $u^r = u_0^r + u_1^r$. 由于上述分析仅能获得瞬时和最终时刻的位移区间,任意时刻的位移区间未能求得.下面采用区间参数摄动法来求得任意时刻的位移区间.

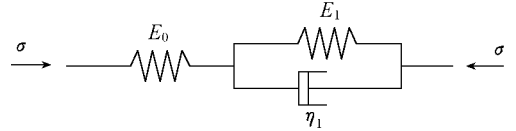


图 1 广义开尔文模型

Fig.1 Generalized Kelvin model

4.2 黏弹性问题的区间参数摄动法

对黏弹性体的有限元法采用时步-初应变法描述时,其控制方程为^[11-12]

$$Ku = R + F_v \tag{15}$$

式中: K ——整体劲度矩阵; u ——位移向量; R ——整体节点荷载列阵; F_v ——黏性变形引起的等效节点荷载,对于 $n = 1$ 的广义开尔文模型,有

$$F_v = \sum_e F_v^e = \sum_e \int_v B^T D \epsilon_{n+1}^v dv = \sum_e \int_v B^T D \left[e^{-\frac{E_1 \Delta t}{\eta_1}} \epsilon_n^v + \left(1 - e^{-\frac{E_1 \Delta t}{\eta_1}} \right) \frac{1}{E_1} C \sigma_n \right] dv$$

式中: η_1 ——开尔文元件的黏性系数; C ——泊松比矩阵.

求解控制方程,得到结点位移,然后利用式(16)计算单元高斯点应力

$$\sigma_{n+1} = DB(u)^e - D\epsilon_{n+1}^v \tag{16}$$

现假设广义开尔文模型中的 E_0, E_1 和 η_1 为区间变量,记为 P^I . 将含有区间参数的劲度矩阵和荷载列阵在参数均值 $P = P^c$ 处 Taylor 展开,忽略二阶及以上微量,有

$$K(P^I) = K^c + \sum_{i=1}^m \Delta P_i^I K_i'(P^c) = K^c + \Delta K^I \tag{17}$$

$$R(P^I) = R^c + \sum_{i=1}^m \Delta P_i^I R'_{vi}(P^c) = R^c + \Delta R^I$$

(18)

$$F_v(P^I) = F_v^c + \sum_{i=1}^m \Delta P_i^I F'_{vi}(P^c) = F_v^c + \Delta F_v^I$$

(19)

由区间参数摄动法的式(11)~(14)有

$$u^c = (K^c)^{-1}(R^c + F_v^c)$$

(20)

$$\Delta u^I = \sum_{i=1}^m \Delta P_i^I (K^c)^{-1} (R'_{vi}(P^c) + F'_{vi}(P^c)) - \sum_{i=1}^m \Delta P_i^I (K^c)^{-1} K'_{vi}(P^c) u^c$$

(21)

$$\Delta u = \sum_{i=1}^m \Delta P_i^I |(K^c)^{-1} (R'_{vi}(P^c) + F'_{vi}(P^c))| + \sum_{i=1}^m \Delta P_i^I |(K^c)^{-1} K'_{vi}(P^c) u^c|$$

(22)

5 算例分析

设一集中荷载作用下的悬臂梁,结构尺寸为 10 m×2 m,左端固定,右端作用集中荷载 $P = -1.0 \times 10^5$ N,如图 2 所示,按平面应力问题分析.假定材料满足广义开尔文模型($n = 1$), E_0, E_1 和 η_1 为区间变量,参数均值为 $E_0^c = 20$ GPa, $E_1^c = 66.7$ GPa, $\eta_1^c = 1.15 \times 10^{12}$ Pa·d 参数离差为 $E_0^r = 2$ GPa, $E_1^r = 6.67$ GPa, $\eta_1^r = 1.15 \times 10^{11}$ Pa·d.按上述原理编制了基于区间参数摄动法的黏弹性区间有限元程序,分析时采用显式算法,计算时间步长为 1 d,累积计算时间 90 d.

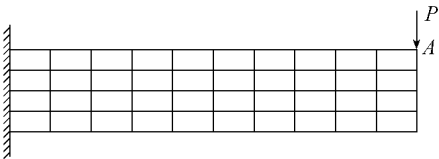


图 2 有限元模型
Fig.2 FEM model

表 1 给出了基于线性静力区间有限元区间参数摄动法计算的点 A 瞬时垂直位移均值和离差(由广义开尔文模型中的 E_0 产生)、以及点 A 最终垂直位移均值和离差(由广义开尔文模型中的 E_0 和 E_1 产生).图 3 为点 A 的垂直位移均值流变值和上下限流变值.

表 1 点 A 垂直位移区间比较
Table 1 Comparison of interval vertical displacements of point A

垂直位移/mm	均值 u^c	离差 u^r
瞬时位移区间	-2.322 11	0.232 21
流变位移区间	-0.696 29	0.069 63
最终位移区间	-3.018 40	0.301 84

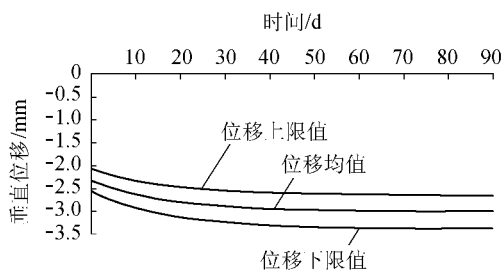


图 3 点 A 垂直位移区间

a. 由表 1 可见,由于结构较为简单,由区间参数摄动法计算得到的不同时刻的垂直位移均值和离差成比例关系.例如 参数均值和参数离差相差 10 倍 而最终垂直位移均值 -3.018 40 mm 和离差 0.301 84 mm 也相差 10 倍.

b. 按黏弹性问题的区间参数摄动法公式进行分析.当 $t = 90$ d 时,计算的点 A 垂直位移均值为 -3.014 63 mm,略小于广义开尔文模型的最终理论垂直位移均值 -3.018 40 mm,计算结果合理.

c. 按黏弹性问题的区间参数摄动法公式进行分析.当 $t = 90$ d 时,计算的点 A 垂直位移离差为 0.374 64 mm,大于广义开尔文模型的最终理论垂直位移离差 0.301 84 mm.即按黏弹性问题的区间参数摄动法计算得到的位移区间包含‘确定性’分析的位移范围,而且区间扩张不明显,由此可见,采用区间参数摄动法进行黏弹性问题分析是可行的.

d. 由图 3 还可见,随着位移均值的增加,位移离差也在逐渐增大,位移区间最终随着位移均值的稳定而逐渐趋于稳定.

6 结 语

a. 本文对线性静力区间有限元的应力区间计算方法进行了评述,认为将含有区间参数的高斯点应力在区间参数均值处进行 Taylor 展开,计算得到的应力区间扩张不明显.

b. 将区间分析方法应用于黏弹性问题,推导了黏弹性问题的区间参数摄动法计算公式,编制了相应的黏弹性区间有限元计算程序,进行了算例分析,认为用区间参数摄动法进行黏弹性问题分析是可行的.

c. 算例分析表明,随着位移均值的增加,位移离差也逐渐增大,位移区间最终随着位移均值的稳定而逐渐趋于稳定.

参考文献:

- [1] 苏静波,邵国建. 基于区间分析的工程结构不确定性研究现状与展望[J]. 力学进展, 2005 35(3) 338-344.
- [2] MOORE R, YANG C. Interval analysis[R]. New York: Technical Document, Lockheed Missiles and Space Division, Number LMSD-285875, 1959.
- [3] QIU Z P, ELISHAKOFF I. Anti-optimization structures with large uncertain but nonrandom parameters via interval analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 152(3-4) 361-372.
- [4] 吕震宙, 冯蕴雯, 岳珠峰. 改进的区间截断法及基于区间分析的非概率可靠性分析方法[J]. 计算力学学报, 2002, 19(3): 260-264.
- [5] 郭书详, 吕震宙. 线性区间有限元静力控制方程的组合解法[J]. 计算力学学报, 2003, 20(1) 34-38.
- [6] 杨晓伟, 陈塑寰, 滕绍勇. 基于单元的静力区间有限元法[J]. 计算力学学报, 2002, 19(2) 179-183.
- [7] 郭书详, 吕震宙. 区间运算和静力区间有限元[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(12) 1249-1254.
- [8] 邱志平, 顾元宪. 有界不确定参数结构位移范围的区间摄动法[J]. 应用力学学报, 1999, 16(1) 1-9.
- [9] 刘世君. 岩石力学反演分析研究及其工程应用[D]. 南京: 河海大学, 2003 32-33.
- [10] 陈和群, 彭宣茂. 有限元微机程序与图形处理[M]. 南京: 河海大学出版社, 1992 17.
- [11] 卓家寿. 非线性固体力学基础[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1996 114-120.
- [12] 孙钧, 汪炳桢. 地下结构有限元法解析[M]. 上海: 同济大学出版社, 1988 85, 163-167.

Study on viscoelastic problem based on the interval parameter perturbation method

HUANG Yao-ying¹, WU Zhong-ru², GU Xuan¹

(1. College of Civil & Hydropower Engineering, China Three Gorges University, Yichang 443002, China ;

2. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: The methods of calculation of interval stress were reviewed, and the method used to calculate the stress interval of a gauss point with Taylor expansion at the mean interval parameter is better than others. The interval analysis method was used to analyze the viscoelastic problem. The formula of the interval parameter perturbation method for the analysis of the viscoelastic problem was deduced, and the finite element program for the viscoelastic problem based on the interval parameter perturbation method was developed. A numerical example shows that it is feasible to analyze the viscoelastic problem with the interval parameter perturbation method. It is also indicated that the displacement deviation increases with the average displacement, and that the displacement interval gradually stabilizes with the stability of average displacement.

Key words: uncertainty ; interval parameter ; perturbation method ; viscoelastic problem