

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2008.06.008

高精度 WENO 和 MWENO 格式溃坝波模拟

王 泽^{1,2}, 陈善群^{1,2}, 王 伟^{1,2}

(1. 河海大学环境科学与工程学院, 江苏 南京 210098;

2. 河海大学浅水湖泊综合治理与资源开发教育部重点实验室, 江苏 南京 210098)

摘要:采用高精度 WENO 和 MWENO 格式对二维浅水方程变量进行数值重构, 研究分析高精度格式捕捉溃坝波的能力和分辨率. 对浅水方程, 采用 Roe-Riemann 格式和波传算法进行数值离散, 并与以上 2 种重构方法两两结合成 4 种计算方法. 采用 Fortran 语言分别对其进行编程计算. 计算结果显示, 高精度格式在捕捉溃坝瞬时基波延续推进的过程较好. 在 4 种计算方法计算结果中, MWENO 型波传格式模拟结果最好, 捕捉溃坝波能力强, 分辨率很高.

关键词: MWENO 格式; 波传算法; 数值重构; 溃坝模拟

中图分类号: TV122+.4; TV139.2+31 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1980(2008)06-0763-06

溃坝波计算是对水库和堤防的失事影响做出定量的估算, 以便合理地确定水库或堤防的防洪设计标准以及避险措施^[1], 因此历来受到人们的极大关注. 由于溃坝波计算的重要性, 国内外专家对其做了大量研究, 目前的主要成果有 (a) 根据简化的水流控制方程推导的计算公式^[2-3] (b) 一维洪水波的数值解^[4] (c) 二维洪水波的数值解^[5]. 这些成果在水利工程的设计和施工中发挥了重要作用.

本文在上述研究成果的基础上, 研究五阶精度 WENO (weighted essentially non-oscillatory)^[6] 和 MWENO (multi-weighted essentially non-oscillatory)^[7] 格式在二维溃坝波模拟中的应用, 分析它们捕捉溃坝波的能力. WENO 和 MWENO 格式具有无震荡、高分辨率、可捕捉强间断的特点, 在实际工程中得到很好的应用. 文献 [8] 研究了二阶精度 ENO (essentially non-oscillatory) 格式捕捉溃坝波的能力. 本文采用五阶精度的 WENO 和 MWENO 格式对浅水方程中的变量进行数值重构. 另外, 在数值模拟过程中, 本文还对 Roe-Riemann 格式 (以下简称 Roe 格式) 和波传 (wave propagation) 算法捕捉溃坝波的能力进行了比较.

1 二维浅水方程 (Euler 型) 及离散

1.1 空间离散

1.1.1 Roe 格式

本文采用的控制方程为守恒型二维浅水方程. 在二维曲线坐标系下, 对该方程半离散为

$$U_t + \frac{\tilde{f}_{i+1/2,j} - \tilde{f}_{i-1/2,j}}{dx} + \frac{\tilde{g}_{i,j+1/2} - \tilde{g}_{i,j-1/2}}{dy} = 0 \quad (1)$$

$\tilde{f}_{i+1/2,j}$ 和 $\tilde{g}_{i,j+1/2}$ 分别为 x 和 y 方向上的数值通量. 采用 Roe-Riemann 通量差分裂法对数值通量 $\tilde{f}_{i+1/2,j}$ 和 $\tilde{g}_{i,j+1/2}$ 进行通量分裂, 有

$$\begin{cases} \tilde{f}_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} \left(f_{i,j} + f_{i+1,j} - \sum_{k=1}^m \tilde{\alpha}_k |\tilde{\lambda}| \tilde{e}_k(\tilde{A}) \right) \\ \tilde{g}_{i,j+1/2} = \frac{1}{2} \left(f_{i,j} + f_{i,j+1} - \sum_{k=1}^m \tilde{\beta}_k |\tilde{\mu}| \tilde{e}_k(\tilde{B}) \right) \end{cases}$$

式中 Jacobi 矩阵 $\tilde{A} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}$, $\tilde{B} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}$. 矩阵 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 的特征值和特征向量为

收稿日期: 2007-11-23

作者简介: 王泽 (1956—), 女, 辽宁沈阳人, 教授, 博士, 主要从事计算流体力学研究.

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= \tilde{u} - \tilde{c} & \tilde{\lambda}_2 &= \tilde{u} & \tilde{\lambda}_3 &= \tilde{u} + \tilde{c} \\ \tilde{\mu}_1 &= \tilde{v} - \tilde{c} & \tilde{\mu}_2 &= \tilde{v} & \tilde{\mu}_3 &= \tilde{v} + \tilde{c} \\ \tilde{e}_1(\tilde{A}) &= (1 \ \tilde{\mu} - \tilde{c} \ \tilde{v})^T & \tilde{e}_2(\tilde{A}) &= (0 \ 0 \ \tilde{c})^T & \tilde{e}_3(\tilde{A}) &= (1 \ \tilde{\mu} + \tilde{c} \ \tilde{v})^T \\ \tilde{e}_1(\tilde{B}) &= (1 \ \tilde{\mu} \ \tilde{v} - \tilde{c})^T & \tilde{e}_2(\tilde{B}) &= (0 \ -\tilde{c} \ 0)^T & \tilde{e}_3(\tilde{B}) &= (1 \ \tilde{\mu} \ \tilde{v} + \tilde{c})^T \end{aligned}$$

Riemann 间断解的跳跃量展开为

$$\begin{aligned} U_f &= \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} h_r - h_1 \\ u_r h_r - u_1 h_1 \\ v_r h_r - v_1 h_1 \end{bmatrix}_f = \sum_{k=1}^m \tilde{\alpha}_k \tilde{e}_k(\tilde{A}) \\ U_g &= \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} h_r - h_1 \\ u_r h_r - u_1 h_1 \\ v_r h_r - v_1 h_1 \end{bmatrix}_g = \sum_{k=1}^m \tilde{\beta}_k \tilde{e}_k(\tilde{B}) \end{aligned}$$

其中 强度因子 $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2} h - \frac{1}{2\tilde{c}} (hu - \tilde{u}h)$ $\tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{\tilde{c}} (hv - \tilde{v}h)$ $\tilde{\alpha}_3 = \frac{1}{2} h + \frac{1}{2\tilde{c}} (hu - \tilde{u}h)$ $\tilde{\beta}_1 = \frac{1}{2} h - \frac{1}{2\tilde{c}} (hv - \tilde{v}h)$ $\tilde{\beta}_2 = \frac{1}{\tilde{c}} (\tilde{u}h - hu)$ $\tilde{\beta}_3 = \frac{1}{2} h + \frac{1}{2\tilde{c}} (hv - \tilde{v}h)$ $\tilde{c}$ 为当地声速. 以上所有带上划线 $\sim$ 的变量都是由 Roe 平均计算得到的, 具体形式可参考文献 [9].

1.1.2 波传算法

波传算法是将单元网格内流通量看成是由左右行波引起的流通量之和, 即:

$$F(U_R) - F(U_L) = \sum_{\lambda_k > 0} \lambda_k W_k + \sum_{\lambda_k < 0} \lambda_k W_k \tag{2}$$

根据波的传播方向, 把单元网格上流通量的变化表示为 正负流通量之和, 式中 $\sum_{\lambda_k > 0} \lambda_k W_k = A^+ \Delta U$, $\sum_{\lambda_k < 0} \lambda_k W_k = A^- \Delta U$. 令 $W_k = \tilde{\alpha}_k \tilde{e}_k$, 二维浅水方程半离散为 [10]

$$\begin{aligned} U_t &= - \frac{(A^+ \Delta U)_{i,j} + (A^- \Delta U)_{i+1,j}}{dx} - \frac{(B^+ \Delta U)_{i,j} + (B^- \Delta U)_{i,j+1}}{dy} = \\ &= - \frac{\sum_{k=1}^m [(\tilde{\lambda}_k^+ \tilde{\alpha}_k \tilde{e}_k(\tilde{A}))_{i,j} + (\tilde{\lambda}_k^- \tilde{\alpha}_k \tilde{e}_k(\tilde{A}))_{i+1,j}]}{dx} - \frac{\sum_{k=1}^m [(\tilde{\mu}_k^+ \tilde{\beta}_k \tilde{e}_k(\tilde{B}))_{i,j} + (\tilde{\mu}_k^- \tilde{\beta}_k \tilde{e}_k(\tilde{B}))_{i,j+1}]}{dy} \end{aligned} \tag{3}$$

其中当 $\lambda < 0$ 时 $\Delta U = U_{i+1/2}^- - U_{i-1/2}^-$, $\lambda > 0$ 时 $\Delta U = U_{i+1/2}^+ - U_{i-1/2}^+$, $U_{i+1/2}^\pm$ 是关于网格单元 i 构造的插值多项式 (WENO 和 MWENO 插值构造). 在右边界点的值, $U_{i+1/2}^+$ 是网格单元 $i+1$ 构造的插值多项式在左边界点的值.

1.2 时间离散

采用三阶 TVD-Runge Kutta 法对时间项进行离散, 具体格式 [9] 如下:

$$\begin{cases} u^{(1)} = u_n + \Delta t L(u_n) \\ u^{(2)} = \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} u^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(u^{(1)}) \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{2}{3} u^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(u^{(2)}) \end{cases}$$

其中 $L(u)$ 是 $u_t = -f(u)_x - g(u)_y$ 的逼近.

2 数值重构

2.1 迎风 WENO5 重构

选择网格构造模块 $s = \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$, 其中子模块 $s_1 = \{i-2, i-1, i\}$, $s_2 = \{i-1, i, i+1\}$, $s_3 = \{i, i+1, i+2\}$, 插值多项式 $p(x)$ 具体构造方法可参考文献 [11]. 对重构变量 u 有

$$\begin{cases} p_{i+1/2}^{(1),-} = \frac{1}{6}(-u_{i+2} + 5u_{i+1} + 2u_i) \\ p_{i+1/2}^{(2),-} = \frac{1}{6}(2u_{i+1} + 5u_i - u_{i-1}) \\ p_{i+1/2}^{(3),-} = \frac{1}{6}(11u_i - 7u_{i-1} + 2u_{i-2}) \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$
$$\begin{cases} p_{i-1/2}^{(1),+} = \frac{1}{6}(-u_{i-2} + 5u_{i-1} + 2u_i) \\ p_{i-1/2}^{(2),+} = \frac{1}{6}(2u_{i-1} + 5u_i - u_{i+1}) \\ p_{i-1/2}^{(3),+} = \frac{1}{6}(11u_i - 7u_{i+1} + 2u_{i+2}) \end{cases} \quad (\lambda < 0)$$

则

$$p_{i+1/2}^{-} = \sum_{l=0}^3 \omega_l p_{i+1/2}^{(l),-}(x) \qquad p_{i-1/2}^{+} = \sum_{l=0}^3 \omega_l p_{i-1/2}^{(l),+}(x)$$

其中权系数 $\omega_l = c_l / (\varepsilon + S_l)$, $c_1 = 3/10$, $c_2 = 3/5$, $c_3 = 1/10$, S_l 为对应于网格模块的光滑因子.

$$\begin{cases} S_1^{-} = \frac{13}{12}(u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i)^2 + \frac{1}{4}(u_{i+2} - 4u_{i+1} + 3u_i)^2 \\ S_2^{-} = \frac{13}{12}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})^2 + \frac{1}{4}(u_{i+1} - u_{i-1})^2 \\ S_3^{-} = \frac{13}{12}(u_{i-2} - 2u_{i-1} + u_i)^2 + \frac{1}{4}(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 3u_i)^2 \end{cases}$$

同理 S_l^{+} 也能相应得到.

2.2 迎风 MWENO5 重构

MWENO5 格式是在 WENO5 构造的基础上增加 2 个子模块 s_0 和 s_4 , 其网格点分别为 $s_0 = \{i - 2, i - 1, i, i + 1\}$, $s_4 = \{i - 1, i, i + 1, i + 2\}$, 重构 $p_{i+1/2}^{-}$ 如下:

$$\begin{cases} p_{i+1/2}^{(0),-} = \frac{1}{12}(-u_{i+2} + 7u_{i+1} + 7u_i - u_{i-1}) \\ p_{i+1/2}^{(1),-} = \frac{1}{6}(-u_{i+2} + 5u_{i+1} + 2u_i) \\ p_{i+1/2}^{(2),-} = \frac{1}{6}(2u_{i+1} + 5u_i - u_{i-1}) \\ p_{i+1/2}^{(3),-} = \frac{1}{6}(11u_i - 7u_{i-1} + 2u_{i-2}) \\ p_{i+1/2}^{(4),-} = \frac{1}{12}(3u_{i+1} + 13u_i - 5u_{i-1} + u_{i-2}) \end{cases}$$

权系数 $\omega_l = c_l / (\varepsilon + S_l)$, $c_0 = 3/10$, $c_1 = 3/20$, $c_2 = 3/10$, $c_3 = 1/20$, $c_4 = 1/5$. 光滑因子函数 $S_k = \sum_{l=1}^{r-1} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{d^l}{dx^l} p_k(x) \right)^2 dx$ ($k = 0, \dots, 4$), 具体重构过程可参考文献 [12], 按此公式给出 5 个模块光滑因子的具体数值如下:

$$\begin{cases} S_0^{-} = 27u_{i+2}^2 + 683u_{i+1}^2 + 1283u_i^2 + 307u_{i-1}^2 + 2u_{i+2}(-101u_{i+1} + 81u_i + 7u_{i-1}) - \\ \qquad 2u_{i+1}(823u_i - 241u_{i-1}) - 1082u_i u_{i-1} \\ S_1^{-} = \frac{1}{3}(4u_{i+2}^2 + 25u_{i+1}^2 + 10u_i^2 + u_{i+2}(11u_i - 19u_{i+1}) - 31u_i u_{i+1}) \\ S_2^{-} = \frac{1}{3}(4u_{i+1}^2 + 13u_i^2 + 4u_{i-1}^2 - 13u_i(u_{i+1} + u_{i-1}) + 5u_{i-1}u_{i+1}) \\ S_3^{-} = \frac{1}{3}(4u_{i-2}^2 + 25u_{i-1}^2 + 10u_i^2 + u_{i-2}(11u_i - 19u_{i-1}) - 31u_i u_{i-1}) \\ S_4^{-} = 27u_{i-2}^2 + 683u_{i-1}^2 + 1283u_i^2 + 307u_{i+1}^2 + 2u_{i-2}(-101u_{i-1} + 81u_i + 7u_{i+1}) - \\ \qquad 2u_{i-1}(823u_i - 241u_{i+1}) - 1082u_i u_{i+1} \end{cases}$$

所以有

$$p_{i+1/2}^- = \sum_{l=0}^{k-1} \omega_l p_i^{(l),-}(x)$$

同理,可类似重构得到 $p_{i-1/2}^+$.

本文采用 Fortran 语言进行编程计算.

3 数值算例

二维溃坝问题^[13]考虑一个面积为 200 m×200 m 的区域,正中有一条大坝将水库和下游一分为二,上游水深 10 m,下游水深 5 m.大坝距离水库一边 95 m 处,突然有一段 80 m 长的坝体倒塌,要求模拟这部分坝体倒塌后水流的情况.问题的平面示意图和网格剖分分别见图 1 和图 2.

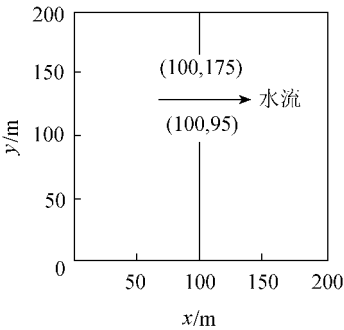


图1 二维溃坝问题的平面示意图

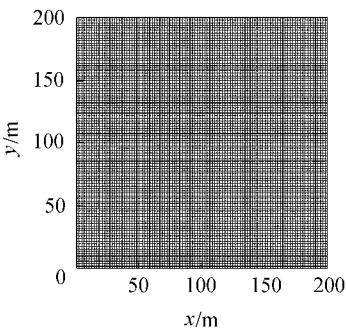
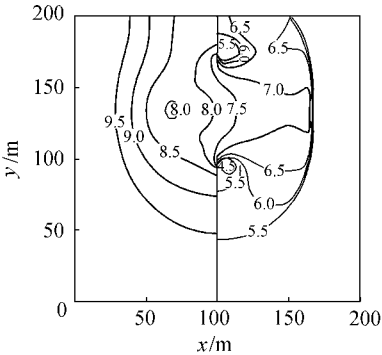


图2 矩形网格

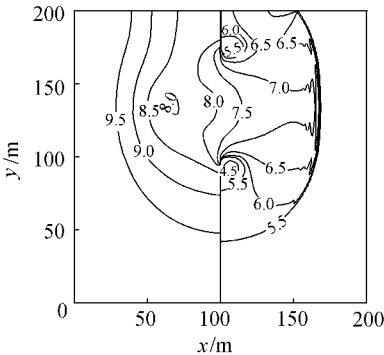
Fig.1 Definition of domain for 2D dam break tests

Fig.2 A rectangular mesh

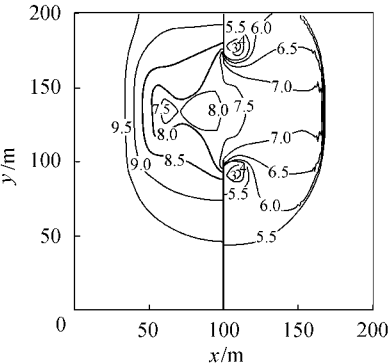
本文采用 WENO5 和 MWENO5 型 Roe 格式、WENO5 和 MWENO5 型波传格式 4 种数值方法对浅水方程进行数值离散.考察它们在溃坝口两端低水位捕捉能力,以及在溃坝后瞬间捕捉溃坝波向下游推进的能力和波的对称性.模拟结果见图 3 和图 4.



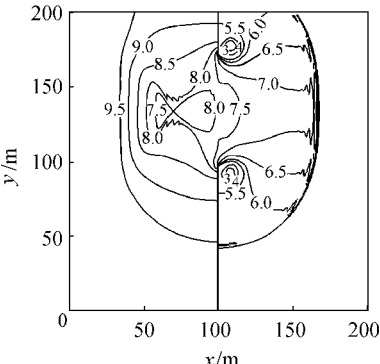
(a) WENO5 型Roe 格式



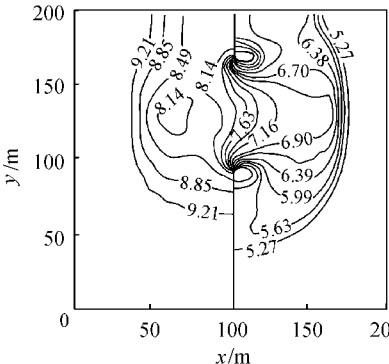
(b) MWENO5 型Roe 格式



(c) WENO5 型波传格式



(d) MWENO5 型波传格式



(e) ENO 型Roe 格式

图3 二维溃坝问题不同计算方法的水位等高线分布($t = 7.2\text{ s}$, 单位: m)

Fig.3 Contour map of water levels of 2D dam break tests for different computational methods($t = 7.2\text{ s}$, unit: m)

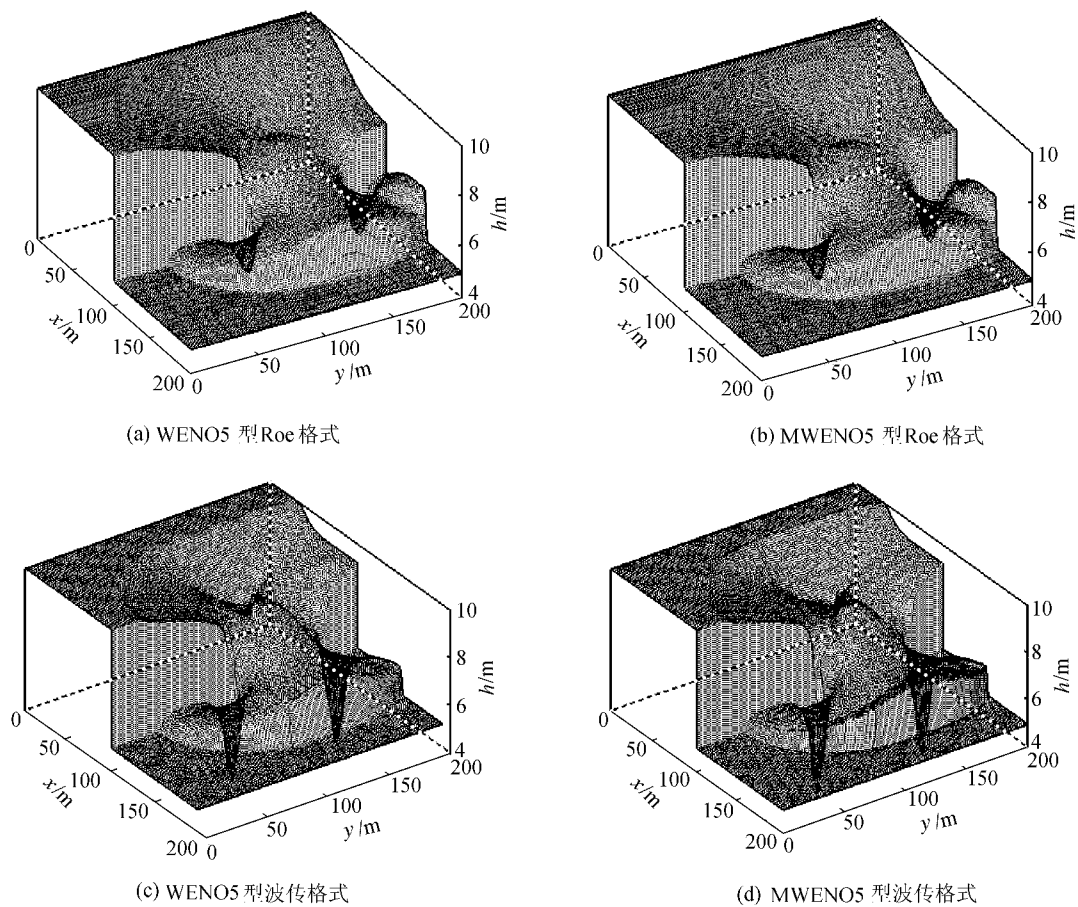


图 4 二维溃坝问题不同计算方法的水位 ($t = 7.2\text{ s}$)

Fig.4 Hydrograph of 2D dam break tests for different computational method($t = 7.2\text{ s}$)

图 3(e) 为文献 [8] 采用二阶精度的 ENO 型 Roe 格式模拟出来的结果, 本文模拟出的 4 种结果与该结果对比可看出, 低水位与瞬时溃坝波向后推进的捕捉上都优于图 3(e) 中结果. 在溃坝口稍上游部分 $8.0\text{ m} < h < 8.3\text{ m}$ 区域, 图 3(c) 和 (d) 中水位等高线的凹凸性比较明显, 且有多条是封闭的, 这正是溃坝附近上游水位分布特征, 而图 3(a) 和 (b) 中水位等高线较为光滑. 由此可得, 在同等重构精度的条件下, 波传算法明显较 Roe 格式好, 能够较好地捕捉到低水位间断, 这一点也可从图 4 所示的溃坝口两端根部低水位区看出. 在溃坝口下游, $h \leq 7.0\text{ m}$ 区域, 图 3(b) 和 (c) 和 (d) 中部分水位等高线尾部呈现锯齿形, 这正是决堤瞬时产生的溃坝波向后推进并延续的结果, 图 3(d) 中水位等高线清晰完好地捕捉到了这一水力特征, 图 3(c) 中等高线也体现了这一特点, 但不够清晰, 不够完全, 且对称性不及图 3(d), 图 3(d) 中水位等高线的对称性好, 这一特点在溃坝上游 $8.5\text{ m} \leq h \leq 8.0\text{ m}$ 区域也得到很好体现. 所以 MWENO5 格式重构较 WENO5 格式好些, 另外从图 4(c) 和 (d) 比较可发现, 低水位间断捕捉 MWENO5 格式要强些.

4 结 论

从 4 种计算方法计算结果分析中得出, 在溃坝模拟中, WENO5 和 MENO5 格式能够很好地模拟溃坝波的运动特征, 且分辨率也很高. 在 4 种计算方法中, MENO5 型波传格式体现出较为明显的优势, 尤其是在低水位间断捕捉和决堤瞬时溃坝波推进延续捕捉上优势更为明显. 另外结果也反映出, Roe-Riemann 通量差分裂法在溃坝波模拟中不及波传算法.

参考文献:

[1] 王立辉, 胡四一. 溃坝问题研究综述 [J]. 水利水电科技进展, 2007, 27(1): 80-85.
[2] 赵以琴, 雷晓云, 高磊, 等. 土壤溃坝模型在夹河子水库中的应用 [J]. 水利水电科技进展, 2004, 24(3): 45-46.
[3] 李杰友, 吴永强, 杨树滩, 等. 泉水水库溃坝洪水模拟计算 [J]. 河海大学学报: 自然科学版, 2002, 30(6): 35-39.

- [4] DELIS A I. Evaluation of some approximate Riemann solvers for transient open channel flow[J]. Journal of Hydraulic Research ,2000 ,28 (3) :45-69.
- [5] JHA A K ,AKIYAMA J ,URA M. Flux-difference splitting schemes for 2D flood flows[J]. Journal of Hydraulic Engineering ,2000 ,126 (1) :145-176.
- [6] LIU Xu-dong ,OSHER S ,CHAN T. Weighted essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. J Comp Phys ,1994 ,115 (1) :200-212.
- [7] BALSARA D S ,SHU Chi-wang. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy[J]. J Comp Phys ,2000 ,160 (2) :405-452.
- [8] 朱华君 ,赵松和. 二维浅水波方程的非结构网格 ENO 型有限体积法[J]. 湖南师范大学自然科学学报 ,2007 ,30 (1) :21-26.
- [9] 刘儒勋 ,舒其望. 计算流体力学的若干新方法[M]. 北京 :科学出版社 ,2003 :97-100.
- [10] LEVEQUE R J. Wave propagation algorithms for multidimensional hyperbolic systems[J]. J Comp Phys ,1997 ,131 (2) :327-353.
- [11] JIANG Guang-shan ,SHU Chi-wang. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. J Comp Phys ,1996 ,126 (1) :202-228.
- [12] 朱君 ,赵宁. 一种 MWENO 格式的构造和应用[J]. 空气动力学学报 ,2005 ,23 (3) :330-333.
- [13] 刘儒勋 ,王志峰. 数值模拟方法和运动界面追踪[M]. 北京 :中国科技大学出版社 ,2001 :33-35.

High accuracy WENO and MWENO schemes for dam break simulation

WANG Ze^{1,2} , CHEN Shan-qun^{1,2} , WANG Wei^{1,2}

(1. College of Environmental Science and Engineering , Hohai University , Nanjing 210098 , China ;

2. Key Laboratory of Integrated Regulation and Resources Development of Shallow Lakes ,
Ministry of Education , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract : Variables for the two-dimensional shallow water equations were reconstructed based on the high accuracy WENO and MWENO schemes. The ability of capturing dam break waves and resolutions were analyzed by use of the high accuracy schemes. The two-dimensional shallow water equations were discretized by means of the Roe-Riemann scheme and wave propagation algorithms. These two schemes combined with the above two reconstructed methods resulted in 4 computational methods. The relevant programs were compiled by use of the Fortran language. The numerical results show that the high accuracy schemes are satisfactory in capturing the continuous propagation process of instantaneous fundamental waves due to the dam break. The comparison among the 4 methods reveals that the simulated results by the wave propagation MWENO scheme are the best. It has strong ability of capturing dam break waves and high resolutions.

Key words : MWENO scheme ; wave propagation algorithm ; numerical reconstruction ; dam break simulation