

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2008.06.009

二维浅水数值模拟的有限差分 MADI 法

郭玉臣¹,徐小明¹,张静怡²

(1.河海大学理学院,江苏 南京 210098;2.河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室,江苏 南京 210098)

摘要:在贴体平面二维正交曲线网格基础上,采用对交替方向隐式 ADI 法变量位置分布进行了改进的 MADI 法对二维水深平均的浅水方程进行差分离散求解,并将这一算法应用于长江南通河段的水流模拟.数值模拟计算结果和实测资料比较结果表明,该算法能较好地模拟复杂条件下天然河道涨潮、落潮水流归槽和流速分布过程.

关键词:浅水方程 有限差分法 正交网格 数值模拟

中图分类号:TV133.2 文献标识码:A 文章编号:1000-1980(2008)06-0769-04

二维浅水流动数值模型的 2 个关键问题^[1-2],一是网格与天然河道拟合;二是二维网格、控制方程和数值方法三者之间的匹配.为使计算网格更好地拟合复杂的平面物理区域,在有限差分领域多采用边界拟合坐标系技术,将复杂边界的物理区域转换成规则的计算区域,从而在计算中能够准确地使用边界条件、提高精度.在运用数值方法求解控制方程方面,国内外广泛采用的是有限差分 ADI(alternating directional implicit)法^[3-8],该方法兼有显式和隐式的优点,但它将水位、 x 和 y 方向流速等变量交错布置在不同节点,不仅增加了计算上的麻烦,而且无法充分利用计算机内存.考虑到现场实测时水深、流速均在同一个节点上,天津水运工程科学研究所发展了一种新的模拟方法——MADI(moving alternating directional implicit)法^[9],它将计算变量均匀布置在同一个网格节点上,由此离散微分方程而形成新的差分代数方程,并建立新的解法.MADI 法吸收了传统 ADI 法的优点,且具备更高的稳定性、收敛性和精度,并能充分利用计算机内存.

根据天然河道岸线条件复杂、河道弯曲等特点,本文在贴体平面二维正交曲线网格上,用 MADI 法对二维水深平均的浅水方程进行差分离散形成差分代数方程,然后求解,最后将这一算法应用于长江南通河段潮流过程的数值模拟,并用实测数据对计算结果进行检验.

1 数学模型

1.1 基本方程

本文研究二维明渠非恒定流问题,选用二维水深平均的流体动力学方程组,形式如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{gn^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{4}{3}}} - fv = \epsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{gn^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{4}{3}}} + fu = \epsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (1)$$

式中: x, y ——笛卡儿坐标; t ——时间; u, v ——沿 x, y 方向的垂线平均流速; z ——水位; h ——水深; n ——曼宁系数(糙率); ϵ ——紊动黏性系数; f ——柯氏力系数, $f = 2\omega \sin \varphi$; g ——重力加速度.

引进边界拟合正交坐标系后,浅水方程可表示为

$$\begin{cases} J \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(L_{\eta} h u_{*}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(L_{\xi} h v_{*}) = 0 \\ \frac{\partial u_{*}}{\partial t} + \frac{u_{*}}{L_{\xi}} \frac{\partial u_{*}}{\partial \xi} + \frac{u_{*} v_{*}}{J} \frac{\partial L_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{v_{*}}{L_{\eta}} \frac{\partial u_{*}}{\partial \eta} - \frac{v_{*}^2}{J} \frac{\partial L_{\eta}}{\partial \xi} + \frac{g}{L_{\xi}} \frac{\partial z}{\partial \xi} = - \frac{g n^2 u_{*} \sqrt{u_{*}^2 + v_{*}^2}}{h^{\frac{4}{3}}} + f v_{*} \\ \frac{\partial v_{*}}{\partial t} + \frac{u_{*}}{L_{\xi}} \frac{\partial v_{*}}{\partial \xi} + \frac{u_{*} v_{*}}{J} \frac{\partial L_{\eta}}{\partial \xi} + \frac{v_{*}}{L_{\eta}} \frac{\partial v_{*}}{\partial \eta} - \frac{u_{*}^2}{J} \frac{\partial L_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{g}{L_{\eta}} \frac{\partial z}{\partial \eta} = - \frac{g n^2 v_{*} \sqrt{u_{*}^2 + v_{*}^2}}{h^{\frac{4}{3}}} - f u_{*} \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$L_{\xi} = (x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2)^{1/2} \quad L_{\eta} = (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)^{1/2} \quad J = L_{\xi} L_{\eta} \quad (3)$$

式中： L_{ξ}, L_{η}, J ——曲线网格的长、宽和面积； u_{*}, v_{*} ——曲线坐标系中沿 ξ 和 η 2 个方向上的垂线平均流速；下标 $*$ 用以区别于直角坐标系下的 u, v ，它们之间的关系为

$$u = \frac{u_{*} L_{\xi} y_{\eta} - v_{*} L_{\eta} y_{\xi}}{x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}} \quad v = \frac{u_{*} L_{\xi} x_{\eta} - v_{*} L_{\eta} x_{\xi}}{y_{\xi} x_{\eta} - y_{\eta} x_{\xi}} \quad (4)$$

为了书写方便，下文中下标 $*$ 均省略。

1.2 方程离散及求解

采用 MADI 法对浅水方程组在贴体平面二维正交曲线网格上差分离散，取 $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$ ，在前半个时间步长， $n \Delta t \rightarrow (n + 1/2) \Delta t$ 内，由 x 方向动量方程与连续方程联立，建立差分方程，整理可得

$$A_1 u_{i-1,j}^{n+1/2} + B_1 z_{i,j}^{n+1/2} + C_1 u_{i+1,j}^{n+1/2} = D_1 \quad (5)$$

$$A_2 z_{i,j}^{n+1/2} + B_2 u_{i+1,j}^{n+1/2} + C_2 z_{i+2,j}^{n+1/2} = D_2 \quad (6)$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 0 & B'_1 & C'_1 & & & \\ B_1 & 0 & 0 & C_1 & & \\ A'_2 & 0 & 0 & B'_2 & C'_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & A_{n-1} & B_{n-1} & 0 & 0 & C_{n-1} \\ & & & A'_n & 0 & 0 & B'_n \\ & & & & A_n & B_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ u_1 \\ z_2 \\ \square \\ u_{n-1} \\ z_n \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D'_1 \\ D_1 \\ D'_2 \\ \square \\ D_{n-1} \\ D'_n \\ D_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

将以上五对角矩阵进行分解可得如下 2 个三对角矩阵：

$$\begin{bmatrix} B'_1 & C'_1 & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A'_{n-1} & B'_{n-1} & C'_{n-1} \\ & & & A_n & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ u_2 \\ \square \\ z_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D'_1 \\ D_2 \\ \square \\ D'_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B_1 & C_1 & & & \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \\ & & & A'_n & B'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ z_2 \\ \square \\ u_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D'_2 \\ \square \\ D_{n-1} \\ D'_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

对式(8)中 2 个三对角矩阵用追赶法求解 $z_{i,j}^{n+1/2}, u_{i+1,j}^{n+1/2}$ ，然后代入式(2)中第 3 个离散方程，即可显式求出 $v_{i,j+1}^{n+1/2}$ 。在后半个时间步长，即 $(n + 1/2) \Delta t \rightarrow (n + 1) \Delta t$ 内，方程的离散与前半步同理，利用前半步求解所得的 $z_{i,j}^{n+1/2}, u_{i+1,j}^{n+1/2}$ 和 $v_{i,j+1}^{n+1/2}$ ，把方程和系数中的 x 和 y, u 和 v, i 和 j 分别调换，把 $n + 1/2$ 换成 $n + 1$ ，即可隐式求出 $z_{i,j}^{n+1}, v_{i,j+1}^{n+1}$ ，然后显式求得 $u_{i+1,j}^{n+1}$ 。

1.3 定解条件处理

初始条件即计算开始 $t = 0$ 时的流速和水深值，一般无法给出，在实际操作时常采用‘零启动’法，即假定 $u_0 = v_0 = 0, z_0 = Z$ (Z 为 $t = 0$ 时的水位) 对陆地边界条件采用虚拟网元镜像边界条件，将边界网元在 ξ 方向的参量取相反符号赋给相应虚拟网元 将自由边界选择在流态比较稳定的地方，上下边界条件均由实测水位资料给出 动边界处理采用冻结法^[10]，根据网元水深判断该网元是否露出水面，露出水面网元的糙率取无穷大，使其周围单元流速趋于零，该单元在计算时被冻结。

2 计算实例

长江南通河段上边界为天生港,下边界为白茆河口.用天生港和白茆河口 2 个国家潮位站 2005 年 12 月 3~4 日的实测潮流过程作为计算潮位的初始条件.在模拟过程中,先用营船港的水位实测资料及 1 号、2 号 2 垂线位置的流速实测资料对模型进行参数率定,然后以徐六径以及 3 号、4 号 2 垂线位置的流速资料对模型的合理性及有效性进行验证.

2.1 计算区域特征及网格布置

南通河段位于长江河口洪季潮流界以下,距长江入海口仅 80 km 左右,其水流既受上游径流影响,又受长江口潮流上溯影响,因此,双向水沙运动是该河段的基本特征.计算河段全长约 48 km,平均河宽 8 km,最大水深约为 60 m,部分区域有露滩存在.此计算区域总面积约 413 km²,计算区域剖分为 4 000 个计算网格,单元网格纵向最大长度 1 200 m,最小 160 m,横向最大长度 400 m,最小 100 m.南通河段水下地形及计算网格布置见图 1.

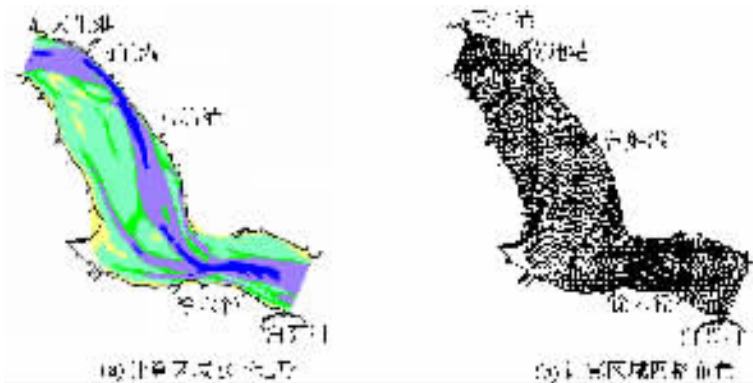


图 1 长江南通河段示意图

Fig.1 Nantong reach on Yangtze River

2.2 模型计算结果

模型计算时取时间步长 $\Delta t = 20\text{ s}$ 柯氏力系数 $f = 2\omega \sin \varphi$,其中 $\omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$, $\varphi = 31.86^\circ$ 曼宁糙率系数由式 $n = 0.018 + 0.01/h$ 确定.

从图 2 可以看出,数值模拟结果较好地反映了该河段的水位过程.在流速的模拟方面,计算流速与实测流速的相位吻合,但在数值上还存在一些差异.图 3 给出了在落急和涨急时刻计算所得流场分布,可以看出,涨潮、落潮时水流归槽及流速分布的总体趋势是合理的.

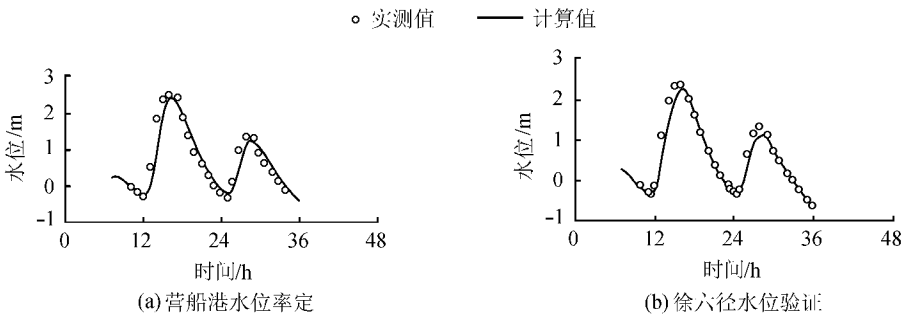


图 2 测点水位比较

Fig.2 Comparison between observed and computed tidal levels

3 结 论

a. 为了直接把方程的求解矩阵化为三对角阵,一般 ADI 法将水位 z 、流速 u 和 v 等水力要素交错布置在不同网格点,因此,计算过程中有些网格点的某些变量需用周围 4 点数值进行插值求得,增加了计算误差.MADI 法弥补了这一缺陷,每一网格点的数值都由方程求解得到,使得计算更切合实际,提高了模型精度和稳定性.

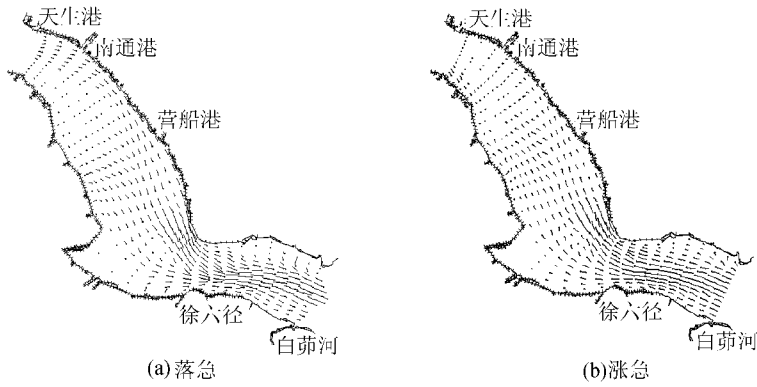


图3 流场分布示意图

Fig.3 Flow fields of flood and ebb tides

b. MADI 法在计算程序编写过程中更加方便,同一个时间步长内可连续对每一网格点求解,能够充分利用计算机内存。

c. 通过对南通河段模拟结果的比较分析可以看出,模型对复杂边界条件的天然河道模拟结果比较合理,能够较好地满足工程分析需要。

参考文献:

- [1] 谭维炎. 浅水动力学的回顾和当代前沿问题[J]. 水科学进展, 1999, 10(3): 296-303.
- [2] 董耀华. 河势贴体河道平面二维正交网格生成方法的研究及应用[J]. 长江科学院院报, 2001, 18(4): 14-17.
- [3] 槐文信, 赵明登. 河道及近海岸水流的数值模拟[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 138-157.
- [4] 汪德□. 计算水力学理论与应用[M]. 南京: 河海大学出版社, 1989: 179-209.
- [5] 王船海, 程文辉. 河道二维非恒定流场计算方法研究[J]. 水利学报, 1991(1): 10-17.
- [6] 汪德□, 陈新建, 杨艳艳. 长江口南支河段潮流场的平面二维有限差分模拟[J]. 河海大学学报, 1987, 15(5): 34-46.
- [7] WU Wei-ming. Depth-averaged two-dimensional numerical modeling of unsteady flow and nonuniform sediment transport in open channels [J]. J Hydraul Eng, 2004, 130(10): 1013-1024.
- [8] MOLLS T, CHAUDHRY M H. Depth-averaged open channel flow model[J]. J Hydraul Eng, 1995, 121(6): 453-465.
- [9] 邱兆山. 有限体积法及其在近岸潮流计算中的应用研究[D]. 青岛: 中国海洋大学, 2003.
- [10] 杨连武, 韩康, 窦振兴, 等. 辽东湾顶极浅海潮流数值计算[J]. 水动力学研究与进展: A 辑, 1994, 9(2): 170-181.

Finite difference MADI method in numerical simulation of two-dimensional shallow water flows

GUO Yu-chen^{1,2}, XU Xiao-ming^{1,2}, ZHANG Jing-yi^{1,2}

(1. College of Sciences, Hohai University, Nanjing 210098, China ;

2. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: The finite difference MADI method, an improved alternating directional implicit (ADI) method in distribution of positions of the variables, was adopted solve the two-dimensional depth-averaged shallow water equations based on the body fitting orthogonal curvilinear grids. The present model was used to simulate the flow fields of Nantong reach on Yangtze River. A comparison between the simulated and measured data shows that this the present algorithm can reflect the process of flood tide, ebb tide and velocity distribution in watercourses under complex conditions.

Key words: shallow water equation ; finite difference method ; orthogonal grid ; numerical simulation