

DOI: 10.3876/j.issn.1000-1980.2008.06.015

基于混合坐标系的单弹簧联结单元法

赵兰浩,李同春,牛志伟,颜天佑

(河海大学水利水电工程学院,江苏 南京 210098)

摘要:在传统双弹簧联结单元法的基础上,提出了一种求解钢筋与混凝土黏结滑移问题的新方法——基于混合坐标系的单弹簧联结单元法.在混凝土实体单元与钢筋梁(杆)单元的切向设置单弹簧联结单元,模拟钢筋与混凝土切向的相互作用,其切向刚度同样是由钢筋与混凝土之间黏结力与滑移量的关系确定.混凝土实体单元在整体坐标系内求解,而为了方便建立法向自由度之间的关系,钢筋梁单元在局部坐标系内求解,通过建立法向自由度约束方程保证钢筋与混凝土的法向变形协调,避免了人为选择法向刚度系数的困难,能够很方便地考虑钢筋对混凝土的销栓效应,并且也适用于钢筋单元在混凝土中任意布置的情况.数值算例表明,该方法是正确和有效的.

关键词:混合坐标系 单弹簧联结单元 钢筋混凝土 黏结滑移

中图分类号:TV33

文献标识码:A

文章编号:1000-1980(2008)06-0796-05

钢筋混凝土结构受力后发生变形,实际上是钢筋和混凝土共同变形的结果.目前,在分析钢筋与混凝土的相互作用时,所采用的有限元模型主要有 3 种:分离式、组合式和整体式^[1].采用分离式模型时,常用的联结单元有双弹簧单元^[2]、无厚度四边形黏结单元^[3]、黏结区单元^[4]、界面元^[5-6]等.这些模型在一定程度上较好地解决了黏结滑移问题的力学分析,但也存在一些固有的缺点.四边形黏结单元难以在三维结构中应用,而黏结区单元因具有实际尺寸而带来网格划分的复杂性,计算工作量大且计算效果并不理想.更为突出的是,在利用联结单元描述钢筋与混凝土的相互作用时,一般需要确定 2 个参数:切向刚度系数 k_H 和法向刚度系数 k_V . k_H 反映了钢筋与混凝土黏结滑移性能,由钢筋与混凝土之间的黏结力 τ 与滑移量 s 的关系确定,一般由实验数据拟合得到. k_V 反映了钢筋对混凝土间的销栓挤压作用,到目前为止对其取值还缺乏研究^[3].一般情况下,为保证钢筋与混凝土之间法向变形协调,需要给一个大的法向刚度系数.理论上 k_V 越大越能代表真实的情况,但过大的取值将会给计算带来一些麻烦,而过小的取值会发生单元相互嵌入问题,致使结构分析模型与实际几何形态有一定的偏差^[7].

本文基于双弹簧联结单元法,提出一种求解钢筋与混凝土黏结滑移问题的新方法——基于混合坐标系的单弹簧联结单元法(以下简称本文方法).本文方法将钢筋用梁(或杆)单元模拟,混凝土用实体单元模拟,钢筋与混凝土相交位置设置双节点.在实体单元与梁单元的切向设置单弹簧联结单元,实体单元在整体坐标系内求解,而为了方便建立法向自由度之间的关系而保证钢筋与混凝土之间法向变形协调,梁、杆单元在局部坐标系内求解,避免了人为选择法向刚度系数的困难,能够很方便地考虑钢筋对混凝土的销栓效应,并且也适用于钢筋单元在混凝土中任意布置的情况.

1 常规的双弹簧联结单元法^[2]

常规的双弹簧联结单元由相互正交的 2 根弹簧组成,可以分别传递 2 点之间的正向力和剪力.这种联结单元是一种力学模型,并非实际构件,具有弹性刚度但没有实际几何尺寸,可以方便地布置在需要设置联系的任何地方.该模型形式简单,力学概念明确,至今仍广泛地应用于钢筋和混凝土之间黏结滑移的有限元模拟.

收稿日期:2008-03-27

基金项目:国家自然科学基金(90510017;10702019);“十一五”国家科技支撑计划(2006BAB04A03)

作者简介:赵兰浩(1980—),男,山东临沂人,讲师,博士,主要从事水工建筑物抗震和流-固耦合研究.

在图 1 中建立起钢筋方向的局部坐标系 $O'HV$,同时定义局部坐标系 $O'HV$ 内 2 个方向的弹簧刚度 法向刚度 k_V 和切向刚度 k_H . 利用虚功原理可以导出双弹簧联结单元结点力 F^e 与节点位移 δ^e 之间的有限元平衡方程：

$$F^e = T^T \begin{bmatrix} k_H & 0 \\ 0 & k_V \end{bmatrix} T \delta^e \quad (1)$$

式中： T ——局部坐标系 $O'HV$ 和整体坐标系 O_{xyz} 之间的坐标转换矩阵. 切向刚度 k_H 即是黏移曲线的斜率 $\frac{d\tau}{ds}$, 而法向刚度的选择则带有较大的人为性, 一般取足够大的数值以保证钢筋和混凝土的接触渗透足够小.

2 单弹簧联结单元法

2.1 坐标变换

本文所采用的混合坐标系统如图 2 所示, O_{xyz} 为整体坐标系, $O'x'y'z'$ 为某一个梁单元局部坐标系, x' 布置在梁的轴向. 考虑到实际问题中钢筋可能不在一条直线上, 在每一个梁单元节点上建立节点局部坐标系 $O^*x^*y^*z^*$, 由相邻梁单元的局部坐标系平均得到. 各个坐标系之间的坐标转换矩阵定义如下: R 为整体坐标系 O_{xyz} 与梁单元局部坐标系 $O'x'y'z'$ 的坐标转换矩阵; r 为整体坐标系 O_{xyz} 与每个节点的局部坐标系 $O^*x^*y^*z^*$ 的坐标转换矩阵.

若记 $u, k, F, u', k', F', u^*, k^*, F^*$ 分别为坐标系 $O_{xyz}, O'x'y'z', O^*x^*y^*z^*$ 内的位移向量、刚度矩阵和荷载向量, 则 3 者之间的关系可以用坐标转换矩阵建立如下关系：

$$u' = Ru \quad F' = RF \quad (2)$$

$$u^* = ru \quad F^* = rF \quad (3)$$

梁单元局部坐标系下的有限元平衡方程为

$$k'u' = F' \quad (4)$$

利用式(2)和式(3)可得到节点局部坐标系 $O^*x^*y^*z^*$ 中的有限元平衡方程：

$$k^*u^* = F^* \quad (5)$$

其中 $k^* = rkr^T = rR^T k' R r^T$, 为梁单元在节点局部坐标系 $O^*x^*y^*z^*$ 中的刚度矩阵.

2.2 法向自由度的约束方程

为了建立钢筋与混凝土在法线方向的关系, 需在二者相交处设置双节点. 但与双弹簧联结单元不同的是, 单弹簧联结单元不需要定义法向弹簧, 而是应用不协调网格协调位移解法^[8]的思想, 令双节点的法向自由度相等来直接建立钢筋与混凝土在法线方向的关系. 由式(3)可以直接得到钢筋法向位移插值方程：

$$u_i^* = \sum_{j=1}^n r_{ij} u_j \quad (i = 2, 3) \quad (6)$$

其中, n 为所求问题的维数, 而插值系数 r_{ij} 即为坐标转换矩阵的元素.

对于钢筋数量较多、分布较为密集的情况, 若都要求钢筋单元的节点与混凝土块体单元的节点位置相重合的话, 可能会给有限元网格剖分带来困难. 本文方法还可用于钢筋单元任意布置的情况. 此时, 双节点中从属于混凝土的节点可以表示为混凝土周围 m 个节点的线性组合 $u_j = \sum_{k=1}^m a^{(k)} u_j^{(k)}$, 从而得到钢筋法向位移插值方程：

$$u_i^* = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m r_{ij} a^{(k)} u_j^{(k)} \quad (i = 2, 3) \quad (7)$$

2.3 混凝土与钢筋的相互作用

若记 f^* 为节点局部坐标系 $O^*x^*y^*z^*$ 内混凝土对钢筋的作用力, 则由作用力与反作用力的关系可知,

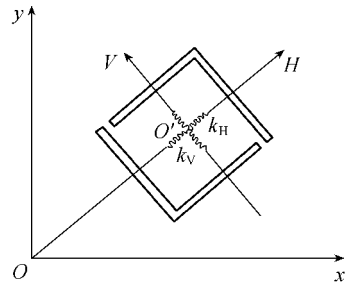


图 1 双弹簧联结单元

Fig.1 Double-spring joint element

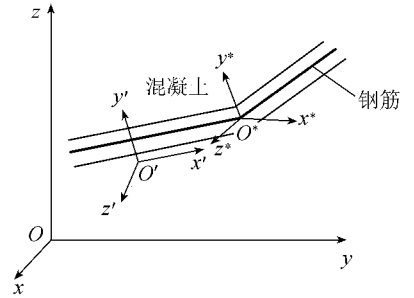


图 2 混合坐标系示意图

Fig.2 Sketch of mixed coordinate system

在整体坐标系 $Oxyz$ 内钢筋对混凝土的作用力为 $-r^T f^*$. 可以建立混凝土和钢筋的增量有限元平衡方程:

混凝土
$$k \Delta u = \Delta F - r^T \Delta f^* \tag{8}$$

钢筋
$$k^* \Delta u^* = \Delta F^* + \Delta f^* \tag{9}$$

由于节点的法向自由度已通过强迫相等的方式保证了钢筋与混凝土之间法向变形协调,即混凝土与钢筋之间的法向作用力已变成内力,不需要在平衡方程中出现,则 f^* 仅仅为混凝土与钢筋之间的切向黏结力. 混凝土与钢筋之间的切向黏结力增量可以表示为

$$\Delta f^* = r^T \Delta f' = r^T \frac{\partial f}{\partial s} \pi D l d_s = r^T k_s (r \Delta u - \Delta u^*) \tag{10}$$

式中 f, s ——由实验得到的黏结力与滑移量; D ——钢筋直径; l ——钢筋长度; d_s ——滑移量.

将式(10)代入至式(8),(9),并写成矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} k + r^T k_s r & -r^T k_s \\ -k_s r & k^* + k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta u^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta F \\ \Delta F^* \end{Bmatrix} \tag{11}$$

式(11)即为本文方法的有限元方程.

3 数值算例

3.1 算例 1

考查设有 U 形无黏结预应力钢筋的混凝土块体结构. 钢筋直径为 36 mm,材料参数取为:混凝土弹性模量 25.5 GPa,泊松比 0.167,钢筋弹性模量 25.5 GPa,泊松比 0.23. 混凝土块体底部固定,钢筋端部承受 1000 kN 的集中荷载,钢筋单元任意自由布置. 有限元模型及其尺寸如图 3 所示. 为突出验证单弹簧联结单元法在描述钢筋与混凝土法向相互作用的有效性,不考虑钢筋与混凝土的黏结作用.

用本文方法计算得到的钢筋与混凝土间作用力分布见图 4,均匀分布的作用力其幅值为 99.981 ~ 100.03 kN/m,在数值上与解析解 100 kN/m 非常接近,且钢筋与混凝土不发生法向嵌入. 改用传统的双弹簧单元法求解,对于这一简单的模型问题,也可以得到接近的钢筋与混凝土间作用力,但钢筋与混凝土在法向会发生嵌入,且嵌入量的量级与法向刚度的量级成反比. 当法向刚度取为 1 kPa 时,嵌入量达 0.013 m. 法向刚度取为 1×10^7 kPa 时,嵌入量减小至 0.13×10^{-8} m,而法向刚度的量级继续增大时,计算收敛性变差甚至不收敛.

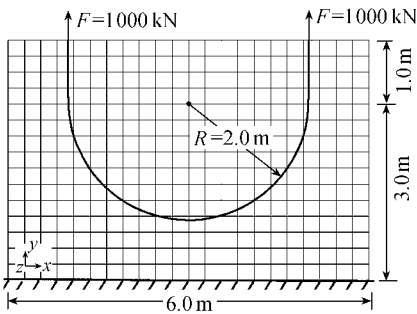


图 3 算例 1 有限元模型

Fig.3 FEM model for Example 1

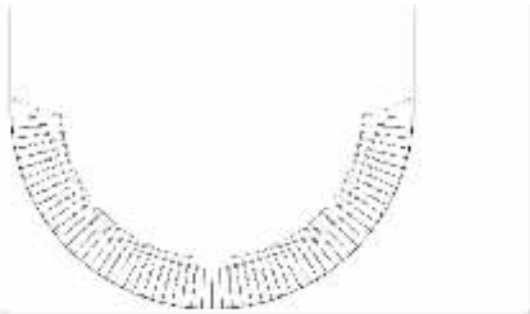


图 4 钢筋与混凝土间作用力分布

Fig.4 Distribution of forces between steel and concrete

3.2 算例 2

与文献[9]相同,本文以 Shima 的 10 号拉伸构件^[10]作为研究对象,说明本文方法的有效性. 试件尺寸、有限元模型见图 5,计算所采用的材料参数为:混凝土弹性模量 33 GPa,泊松比 0.167,抗压强度 21.6 GPa,钢筋弹性模量 190 GPa,泊松比 0.23,屈服强度 428 MPa. 五级加载时钢筋端部的应变值分别为 0.786×10^{-3} , 1.471×10^{-3} , 2.286×10^{-3} , 2.886×10^{-3} , 3.586×10^{-3} . 黏结滑移本构关系采用 Shima 提出的将黏结应力表示为滑移量函数与钢筋应变函数的乘积^[9],其表达式为

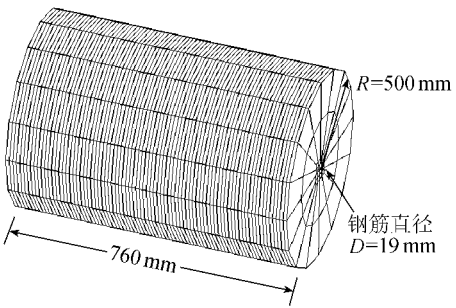


图 5 算例 2 有限元模型

Fig.5 FEM model for Example 2

$$\tau(\epsilon_s,s) = 0.73f'_c\left[\ln\left(1 + \frac{10^5s}{D}\right)\right]^3 \times \frac{1}{1 + 10\epsilon_s}$$

式中： f'_c ——混凝土抗压强度； ϵ_s ——钢筋应变； D ——钢筋直径，mm； s ——滑移量，mm； τ ——黏结力，MPa。

用本文方法计算得到的四级荷载作用下，钢筋应变沿构件长度的分布与实测值的对比见图 6。从图 6 可以看出，本文方法计算结果与实测值吻合较好，尤其在低应力水平下，计算结果与实测结果几乎完全吻合，而随着拔拉荷载的增大，本文方法得到的钢筋应变值在数值上比实测值要小，但分布规律却接近。分析其原因，一方面由于计算所采用的计算模型可能与实际有一定出入，另一方面在高应力水平下，所采用的黏结滑移本构关系的适用性受到影响。图 6 同时还给出了相同计算条件下双弹簧联结单元法的计算结果。由于本例为轴向拉伸构件，实际上不存在法向刚度的选择及相互嵌入问题，双弹簧联结单元法的计算结果几乎与本文方法的计算结果完全吻合，这也从另一个角度验证了本文方法的正确性和有效性。

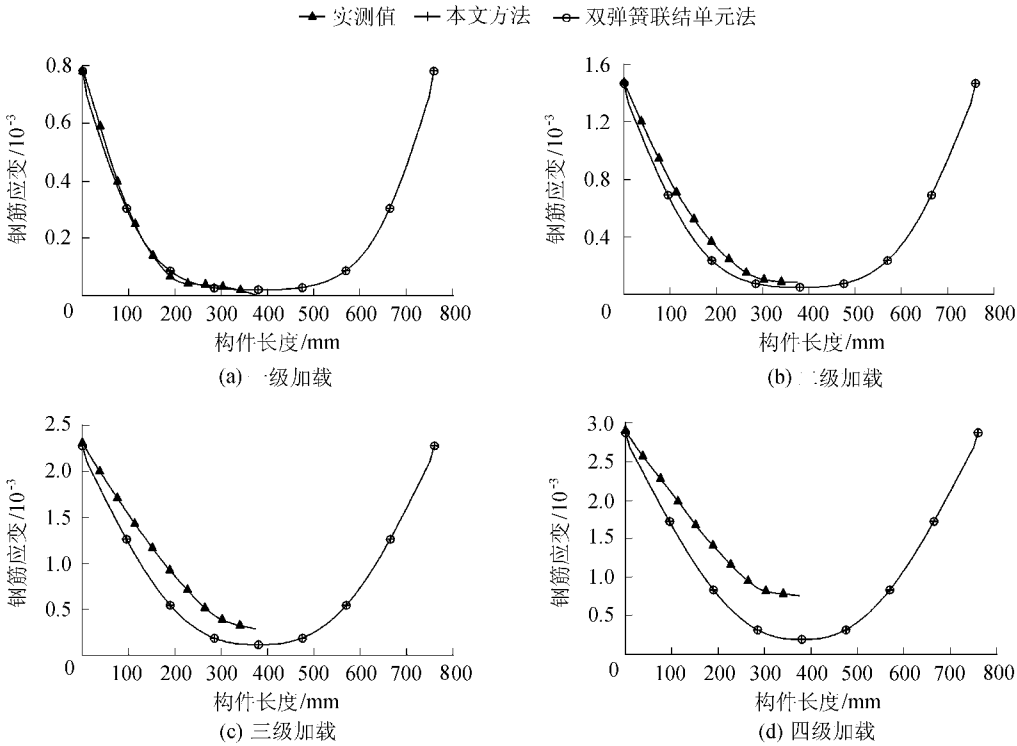


图 6 不同加载步钢筋应变沿构件长度分布

Fig.6 Distribution of steel strains along the length of components at different loading steps

4 结 语

在双弹簧联结单元法的基础上，提出一种求解钢筋与混凝土黏结滑移问题的新方法——基于混合坐标系的单弹簧联结单元法。该方法只在钢筋切向设置单弹簧，通过建立钢筋与混凝土法向自由度的约束方程反映二者在法向方向的相互作用力，避开了人为选择法向刚度系数的困难，能够很方便地考虑钢筋对混凝土的销栓效应，并且也适用于钢筋单元在混凝土中任意布置的情况。数值算例的计算结果与实测值吻合较好，说明了该方法的正确性和有效性。

参考文献：

[1] 江见鲸. 钢筋混凝土结构非线性有限元分析[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1994.

[2] 董哲仁. 钢筋混凝土非线性有限元法原理与应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2002.

[3] 沈聚敏, 王传志, 江见鲸. 钢筋混凝土有限元与板壳极限分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 1993.

[4] 吕西林, 金国芳, 吴晓涵. 钢筋混凝土结构非线性有限元理论与应用[M]. 上海: 同济大学出版社, 1996.

[5] 杜培荣, 卓家寿, 孟闻远. 钢筋混凝土界面问题分析模型[J]. 河海大学学报: 自然科学版, 2007, 35(3): 312-314.

[6] 高向玲, 李杰. 钢筋与混凝土黏结本构关系的数值模拟[J]. 计算力学学报, 2005, 22(1): 73-77.

- [7] 戚乐磊,赵鸿铁,梁若筠,等.黏结滑移问题的界面应力元模型[J].河海大学学报:自然科学版,2004,32(2):188-191.
- [8] 李同春,李森,温召旺,等.局部非协调网格在高拱坝应力分析中的应用[J].河海大学学报:自然科学版,2003,31(1):12-45.
- [9] 陈观福.强震区高拱坝横缝配筋与混凝土相互作用模型研究与应用[D].北京:清华大学,2002.
- [10] SHIMA H, CHOU L, OKAMURA H. Micro and macro models for bond in reinforced concrete[J]. Journal of the Faculty of Engineering, University of Tokyo(B), 1987, 39(2):133-94.

Single-spring joint element method based on mixed coordinate system

ZHAO Lan-hao, LI Tong-chun, NIU Zhi-wei, YAN Tian-you

(College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Based on the traditional double-spring joint element method, a new method—single-spring joint element method based on the mixed coordinate system, was proposed for bond-slip problems of steel bars and concrete. The single-spring joint elements were arranged along the tangential direction of the solid elements for concrete and the beam elements for steel bars to simulate the tangential interaction. The tangential stiffness was determined by the relationship between the bond force and slip. The solid elements for concrete were solved in the global coordinate system. In order to establish the relationship among the normal direction degrees of freedom, the beam elements for the steel bars were solved in the local coordinate system. The deformation compatibility between concrete and steel bars was ensured by means of the establishment of restraint equations of the normal degrees of freedom, overcoming the difficulty to choose the normal stiffness coefficients, and it was available to arbitrary layout of beam elements for steel bars in concrete. The validity and accuracy of the proposed procedure was demonstrated by numerical examples.

Key words: mixed coordinate system; single-spring joint element; reinforced concrete; bond-slip

《河海大学学报(自然科学版)》征订启事

(邮发代号 28-63, CN32-1117/TV, ISSN1000-1980, 双月刊)

《河海大学学报(自然科学版)》是以水资源开发、利用与保护为重点的综合性学术期刊,主要刊登河海大学在水资源、水文、地质、测量、水利工程、水电工程、水运工程、海洋及海岸工程、水工结构、工程力学、水力学及河流动力学、岩土工程、计算机科学、电力工程、电子技术及自动化工程、工业与民用建筑、管理工程、水利经济、环境工程、机械工程等学科方面的科研成果、学术论文、学术讨论、研究动态等学术性文章,可供上述有关专业的科技工作者及大专院校师生阅读和参考。

《河海大学学报(自然科学版)》创办于1957年,是全国中文核心期刊、中国科技核心期刊,在国内工程技术界和学术界有较大影响。刊载的文章中,有不少国家科技攻关(重点)项目和各种科学基金资助项目的研究成果,部分达到了国内领先和国际先进水平,为我国水利、水电、水运工程及其他有关工程建设的规划、设计、施工和管理提供了科学理论、方法和具体建议,发挥了较大的社会效益和经济效益,深受工程界和科技界赞许,并获得首届中国高校优秀科技期刊奖以及中国期刊方阵“双效期刊”、江苏省优秀期刊、全国水利系统优秀期刊称号。

《河海大学学报(自然科学版)》每逢单月出版,国内外公开发行,每期定价12.00元,全年6期共72.00元。欢迎广大读者通过全国各地邮政局订阅或直接与编辑部联系。

编辑部地址:210098 南京市西康路1号 《河海大学学报(自然科学版)》编辑部

电话/传真:025-83786343

E-mail:xb@hhu.edu.cn