

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2008.06.029

时域有限差分法的一种新角点条件

刘国高

(河海大学常州校区数理部,江苏 常州 213022)

摘要:时域有限差分法(FDTD)的很多吸收边界条件(ABC)都需要对角点做特殊处理.为克服已有 FDTD 角点条件的不足,提出了 FDTD 的一种新角点条件,其基本原理是:角点在 2 个或 3 个方向上引起反射,因此可从 2 个或 3 个方向上消除反射.数值实验表明该条件是有效的,具有适用面广、程序实现简单等优点.该条件还可推广用于区域边棱的特殊处理.

关键词:时域有限差分法(FDTD) 吸收边界条件(ABC) 角点 数值反射

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1980(2008)06-0860-03

时域有限差分法(the finite-difference time-domain method, FDTD)^[1-3] 以其原理简单、适用面广等优点在电磁仿真领域获得了广泛应用.由于计算机存储量的限制,对于开域问题,仿真区域必须在空间某处截断,这就要用到吸收边界条件(absorbing boundary conditions, ABC).已有的多数吸收边界条件都需要对区域角点做特殊处理.目前已提出了多种 FDTD 角点条件^[4-9],但都存在一些不足,如文献[4-8]提出的几种 FDTD 角点条件都假设入射到角点处的波是从仿真区域中心传来的,或是沿元胞对角线传播的,这样的假设显然比较牵强,在很多情形下并不成立.文献[9]提出的 FDTD 角点条件没有这样的假设,但实现起来非常复杂,而且要作很多插值处理,实际效果并不好.完全匹配层(perfectly matched layer, PML)吸收边界条件^[10-12]不需要对角点做特殊处理,但其内存消耗大,程序实现复杂,在计算精度要求不高的情形下,往往并不被采用.基于这种现状,本文提出了 FDTD 的一种新角点条件(以下简称新角点条件).

1 基本原理

新角点条件的基本原理是:角点是 2 个(二维情形)或 3 个(三维情形)边界的公共部分,2 个或 3 个边界在角点处都会产生数值反射,因此消除反射可在 2 个或 3 个方向上进行.新角点条件的实质是把二维或三维问题转化为一维问题,从而简化问题的求解过程.下面以工程实践中应用较多的 Mur 吸收边界条件为例,说明该条件求解的具体步骤.

考虑二维情形的角点(0,0),该点是 2 个边界的交点,2 个边界在该点都要引起数值反射,为了消除这些反射,可在该点分别使用 2 个边界上的吸收边界条件.

2 个边界上的一阶单向波方程吸收边界条件分别为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

其中 φ 表示任一电磁场分量.

在角点(0,0)处,式(1)和式(2)的 Mur 二阶中心差分格式分别为^[3]

$$\varphi^{n+1}(0,0) = \varphi^n(1,0) + \frac{v\Delta t - \Delta x}{v\Delta t + \Delta x} [\varphi^{n+1}(1,0) - \varphi^n(0,0)] \tag{3}$$

$$\varphi^{n+1}(0,0) = \varphi^n(0,1) + \frac{v\Delta t - \Delta y}{v\Delta t + \Delta y} [\varphi^{n+1}(0,1) - \varphi^n(0,0)] \tag{4}$$

收稿日期:2008-01-14

基金项目:常州新北区科技攻关项目(XE20070614);江苏省社会发展科技项目(BS2007058)

作者简介:刘国高(1962—),男,安徽马鞍山人,讲师,硕士,主要从事小波分析及其应用研究.

式中： v ——波在介质中的相速； Δt ——时间步长； $\Delta x, \Delta y$ ——2 个坐标轴方向上的空间步长； $n, n+1$ ——时间坐标. 综合式(3)和式(4)得

$$\begin{aligned} \varphi^{n+1}(0,0) = & \frac{1}{2} [\varphi^n(1,0) + \varphi^n(0,1)] + \frac{v\Delta t - \Delta x}{2(v\Delta t + \Delta x)} [\varphi^{n+1}(1,0) - \varphi^n(0,0)] + \\ & \frac{v\Delta t - \Delta y}{2(v\Delta t + \Delta y)} [\varphi^{n+1}(0,1) - \varphi^n(0,0)] \end{aligned} \tag{5}$$

式(5)即为用新角点条件得到的 Mur 差分格式.

2 数值实验

2.1 二维实例

程序模拟的是二维 TM 柱面波. 激励源为 $t=0$ 时刻开通的谐变源, 表达式为

$$E = \sin\left(\frac{2\pi c}{\lambda}t\right) \tag{6}$$

其中 $\lambda=1.0\text{ m}$. 空间步长 $\Delta x = \Delta y = \frac{\lambda}{20}$, 时间步长 $\Delta t = \frac{\Delta x}{2c}$. 仿真区域的大小为 $(0 \sim 60) \times (0 \sim 60)$, 源以强迫源^[3]的方式加在点(20,20)处. 吸收边界条件采用 Mur 二阶吸收边界条件. 仿真时间总步数为 $n=150$.

为了能够进行对比, 编写了 3 套程序, 其中 2 套程序的 FDTD 角点条件分别采用新角点条件和文献[5-6]给出的 FDTD 角点条件. 第 3 套程序则不加边界条件和 FDTD 角点条件, 这可以通过扩大仿真区域使波在仿真时间内传不到仿真区域边界来实现, 此时由于波未到达区域边界, 即使在边界上不加吸收边界条件和 FDTD 角点条件也不会引起数值反射. 扩大后的仿真区域相对于原区域 2 个边长各扩大了 1 倍, 通过计算可知在仿真时间内数值反射不会到达原区域的边界, 故这种情形仿真结果最好. 3 套程序的其他部分完全相同, 这样即可看出不同 FDTD 角点条件对计算结果的影响. 图 1 为 3 套程序在 $n=150$ 时间步时仿真区域中的等值线(图中 2 个坐标轴分别表示仿真区域的 2 个边长), 可以看出, 3 幅图几乎没有差别.

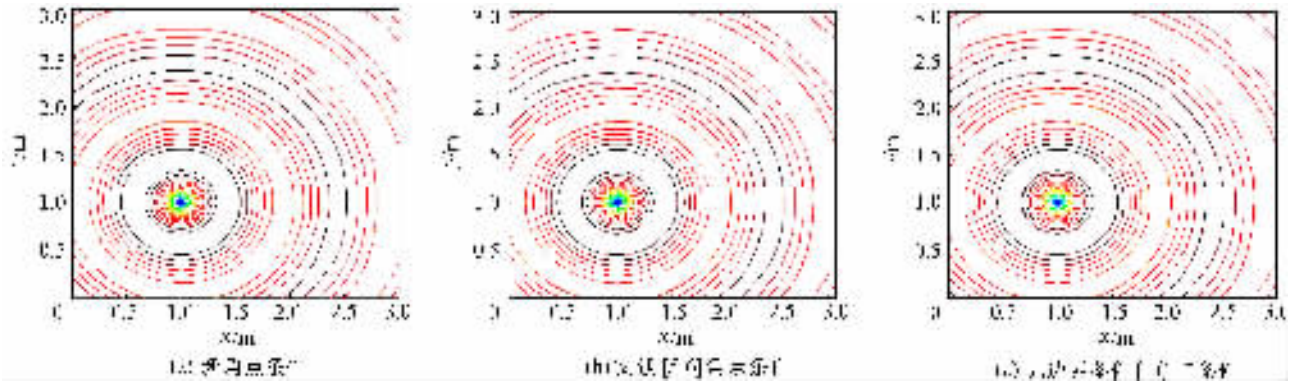


图 1 仿真区域中的等值线

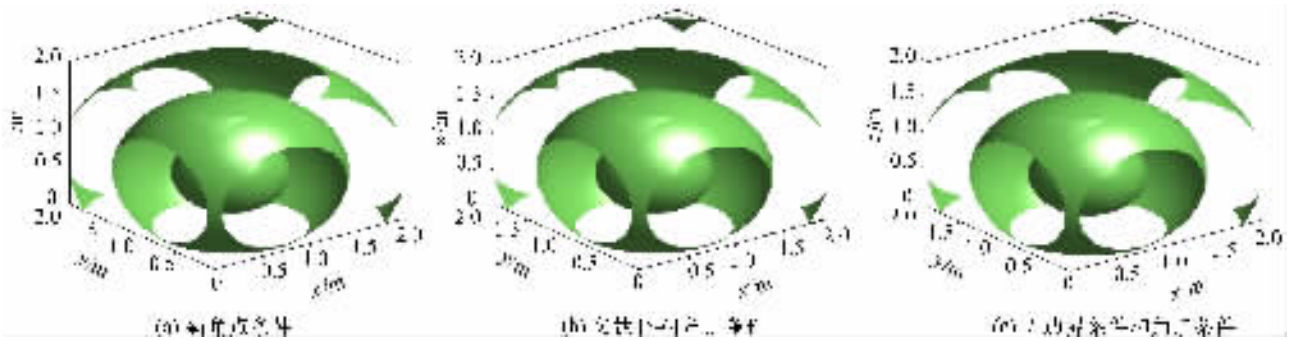
Fig.1 Contour lines in the simulation domain

2.2 三维实例

三维实例模拟的是三维球面波. 波源函数、空间和时间步长、波源设置方式等都分别和二维实例相同. 仿真区域的大小设定为 $(0 \sim 40) \times (0 \sim 40) \times (0 \sim 40)$, 波源加在点(15,15,15)处. 仿真时间总步数 $n=120$. 对第 3 套程序, 扩大后的仿真区域相对于原区域 3 个边长各扩大了 1.5 倍. 图 2 是 3 套程序在 $n=120$ 时间步时仿真区域中场值 $E=0$ 的等值面(图中 3 个坐标轴分别表示仿真区域的 3 个边长), 可以看出, 和二维实例一样, 3 幅图几乎没有差别. 这表明新角点条件是有效的.

3 结 语

本文提出的新角点条件具有以下优点:(a)把二维或三维问题转化为一维问题, 程序实现较为简单, 而且精度也容易提高, 这只要对式(1)和式(2)做高阶差分离散即可;(b)可推广用于三维问题的边棱的特殊处理;(c)由于所有波的波动方程都是一样的, 因此新的角点条件完全可以推广用于其他波如声波的仿真.

图2 仿真区域中场值 $E=0$ 的等值面Fig.2 Contour surfaces of $E=0$ in the simulation domain

参考文献:

- [1] YEE K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media[J]. IEEE Trans AP, 1966, 14(3): 302-307.
- [2] TAFLOVE A, HAGNESS S C. Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method[M]. 2th edition. London: Artech House, 2000: 39-41.
- [3] 王秉中. 计算电磁学[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 52-160.
- [4] 王长清, 祝西里. 电磁场计算中的时域有限差分法[M]. 北京: 北京大学出版社, 1994: 62-64.
- [5] 李永明, 俞集辉, 黄键. 时域有限差分法中的吸收边界条件与角点处理[J]. 重庆大学学报, 2001, 24(3): 68-71.
- [6] 葛德彪, 闫玉波. 电磁波时域有限差分方法[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2002: 39-49.
- [7] 李太宝. 计算声学[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 63.
- [8] 邢丽, 黄自萍. 基于透射边界条件的高阶离散型角点条件[J]. 应用数学与计算数学学报, 2003, 17(2): 7-14.
- [9] 罗大清, 宋炜, 吴律, 等. 一种有效的处理模型角点反射的方法[J]. 石油物探, 2000, 39(4): 26-31.
- [10] BERENGER J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 114(2): 185-200.
- [11] BERENGER J P. Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems[J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 1996, 44(1): 110-117.
- [12] SACHDEVA N. A new absorbing boundary condition for FDTD[J]. Microwave Opt Tech Lett, 2000, 25(2): 86-90.

A new vertex condition of finite-difference time-domain method

LIU Guo-gao

(Department of Mathematics and Physics of Changzhou Campus, Hohai University, Changzhou 213022, China)

Abstract: Special treatment of vertices is needed when many absorbing boundary conditions of the finite difference time-domain method are used. In order to overcome the shortcomings of the existing vertex conditions, a new vertex condition was put forward. The fundamental principles of the condition were as follows: the vertex caused numerical reflection in 2 or 3 directions, and thus, the numerical reflection should be eliminated in 2 or 3 directions. Numerical experiments show that the vertex condition is valid and has the advantages of wider suitability and simpler realization of programs. In addition, the vertex condition can be popularized to the treatment of the edges.

Key words: finite-difference time-domain method; absorbing boundary conditions; vertex; numerical reflection