

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2008.06.031

非线性边界条件下反应-扩散方程组全局吸引子的存在性

李晓军 ,孙中喜

(河海大学理学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :考虑在非线性边界条件下反应-扩散方程组解的渐近行为 ,当非线性项 f, g 满足一定的条件时 ,得到反应-扩散方程组存在有界吸收集 .利用反应-扩散方程组解的正则性 ,证明了在强耗散和弱耗散条件下全局吸引子的存在性 .

关键词 :反应-扩散 ;非线性边界条件 ;吸引子

中图分类号 :O175.29 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2008)06-0867-04

1 预 备 知 识

本文考虑非线性边界条件下的反应-扩散方程组

$$\begin{cases} z_t - D\Delta z + f_e(z) = 0 & \text{in } \Omega \\ D \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + g_e(z) = 0 & \text{on } \Gamma := \partial\Omega \\ z(x, 0) = z_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

全局吸引子的存在性 .这里 Ω 是 R^N 中的有界光滑区域 , Γ 是 Ω 的边界部分 , $z(x, t) := (z_1(x, t), z_2(x, t), \dots, z_K(x, t))^T, z_i(x, t) \in R, D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_K)$ 且 $d_i > 0, \Delta z = (\Delta z_1, \Delta z_2, \dots, \Delta z_K)^T, f_e(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_K(z))^T, g_e(z) = (g_1(z), g_2(z), \dots, g_K(z))^T, f_i(z), g_i(z) \in R, 1 \leq i \leq K$. 同时还假定 $f_e(z), g_e(z)$ 是一个局部 Lipschitz 函数且满足一定的增长条件 .

许多物理(物理-化学、生物等)理论能用数学的形式描述为抛物问题 ,可参见文献 [1-4]. 对 $1 \leq i \leq K$, $z_i(x, 0) \in L^q(\Omega)$,令 $X = L^q(\Omega), Z = L^q(\Omega, R^K) = X \times X \dots \times X = [L^q(\Omega)]^K$,定义式 (1) 的变分弱解 .

定义 1 设 $z_0 \in L^q(\Omega, R^K)$ ($1 < q < +\infty$) 称函数 $z \in C([0, \tau), L^q(\Omega, R^K)) = [C([0, \tau), L^q(\Omega))]^K$ 为式 (1) 的变分弱解 ,如果对任意的 $\varphi \in W_N^{2, q'}(\Omega, R^K) = [W_N^{2, q'}(\Omega)]^K := \{\varphi \in W^{2, q'}(\Omega, R^K); \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$,它满足

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \int_{\Omega} z_1 \psi_1 \\ \int_{\Omega} z_2 \psi_2 \\ \vdots \\ \int_{\Omega} z_K \psi_K \end{pmatrix} - D \begin{pmatrix} \int_{\Omega} z_1 \Delta \psi_1 \\ \int_{\Omega} z_2 \Delta \psi_2 \\ \vdots \\ \int_{\Omega} z_K \Delta \psi_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{\Omega} f_1(z) \psi_1 \\ \int_{\Omega} f_2(z) \psi_2 \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f_K(z) \psi_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_{\Omega} g_1(z) \psi_1 \\ \int_{\Omega} g_2(z) \psi_2 \\ \vdots \\ \int_{\Omega} g_K(z) \psi_K \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

对 $z_0 \in L^q(\Omega, R^K)$,由定义 1 可知 ,公式 (2) 所对应的抽象形式为

$$z_t = Az + f_{ef}(z) + g_{ef}(z) \qquad z(0) = z_0 \in L^q(\Omega, R^K) \tag{3}$$

其中

$$A \in L(L^q(\Omega, R^K) \rightarrow (W_N^{2, q'}(\Omega, R^K))) \qquad \langle Az, \psi \rangle = D \left(\int_{\Omega} z_1 \Delta \psi_1, \int_{\Omega} z_2 \Delta \psi_2, \dots, \int_{\Omega} z_K \Delta \psi_K \right)^T \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \langle f_{\alpha}(z) + g_{\alpha}(z), \psi \rangle = & - \left(\int_{\Omega} f_1(z) \psi_1, \int_{\Omega} f_2(z) \psi_2, \dots, \int_{\Omega} f_K(z) \psi_K \right)^T - \\ & \left(\int_{\Omega} g_1(z) \psi_1, \int_{\Omega} g_2(z) \psi_2, \dots, \int_{\Omega} g_K(z) \psi_K \right)^T \quad \forall \psi \in W_N^{2,q'}(\Omega, R^K) \end{aligned} \quad (5)$$

在定义1下,式(1)的解都满足积分方程

$$x(t) = e^{At} z_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} [f_{\alpha}(x(s)) + g_{\alpha}(x(s))] ds \quad (6)$$

其中算子 A 同式(4)所定义. $z: [0, \tau] \rightarrow Z_1$ 称为是问题(1)的 ε -正则解, 如果 $u \in \alpha([0, \tau], Z_1) \cap \alpha((0, \tau], Z_{1+\varepsilon})$ 且 $x(t)$ 满足

$$x(t) = e^{At} z_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} h(x(s)) ds$$

这里 Z_{α} 是由扇形算子 A 生成的分数次乘积空间(其构造同文献[2, 5]), $\alpha > 0$, $h(z) = f_{\alpha}(z) + g_{\alpha}(z)$.

在系统(1)中,假定 f_{-e}, g_{-e} 满足增长条件

$$|h(z_1) - h(z_2)| \leq C |z_{1i} - z_{2i}| (|z_{1i}|^{\rho_{ji}-1} + |z_{2i}|^{\rho_{ji}-1} + 1) \quad (1 \leq i \leq K, \rho_{ji} > 1) \quad (7)$$

这里 $h_i = f_i, g_i (j=1, 2)$. 由文献[6]中定理2.2及插值空间理论,有以下的结论:

定理1 设 $1 < q < \infty, N \geq 2$ (特别 $N=1$) f_i, g_i 分别带指数 ρ_{1i}, ρ_{2i} 并满足式(7),且

$$\rho_{1i} \leq \rho_f = 1 + \frac{2q}{N}, \quad \rho_{2i} \leq \rho_g = 1 + \frac{q}{N} \quad (\rho_{1i} < 1 + 2q, \rho_{2i} < 1 + q, 1 \leq i \leq K) \quad (8)$$

那么任给初值 $z_0 \in L^q(\Omega, R^K)$, 存在 $\varepsilon > 0$, 式(1)有唯一的 ε -正则解存在. 此外, 该解为古典解.

2 主要结果

以下寻求式(1)的混合耗散条件. 首先, 初值空间选为 $L^r(\Omega, R^K)$. 在式(1)第一式中第 i 个方程两边同乘以 $|z_i|^{r-2} z_i$, 分步积分并利用边界条件, 然后把 K 个方程相加可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \|x(t)\|_{L^r(\Omega, R^K)}^r + \frac{(r-1)}{r^2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^K d_i |\nabla |z_i|^{\frac{r}{2}}|^2 + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^K f_i(x(t)) |z_i|^{r-2} z_i + \\ \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^K g_i(x(t)) |z_i|^{r-2} z_i = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)左边最后2项可写为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^K f_i(x(t)) |z_i|^{r-2} z_i + \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^K g_i(x(t)) |z_i|^{r-2} z_i = \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^K f_i(x(t)) |z_i|^{r-2} z_i + \frac{|\Gamma|}{|\Omega|} \sum_{i=1}^K g_i(x(t)) \cdot \right. \\ \left. |z_i|^{r-2} z_i \right] - \int_{\Omega} \left[\frac{|\Gamma|}{|\Omega|} \sum_{i=1}^K g_i(x(t)) |z_i|^{r-2} z_i - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^K g_i(x(t)) |z_i|^{r-2} z_i \right] \end{aligned} \quad (10)$$

由 Pioncaré 不等式及 Young's 不等式可得

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \left[\frac{|\Gamma|}{|\Omega|} \sum_{i=1}^K g_i(x(t)) |z_i|^{r-2} z_i - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^K g_i(x(t)) |z_i|^{r-2} z_i \right] \right| \leq C \sum_{i=1}^K \int_{\Omega} |\nabla (g_i(x(t)) |z_i|^{r-2} z_i)| \leq \\ \sum_{i=1}^K \int_{\Omega} \left| \frac{2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} g_i(x(t)) z_i + \frac{(r-1)}{r} g_i(x(t)) \right) \right| |z_i|^{\frac{r}{2}-1} |\nabla |z_i|^{\frac{r}{2}}| + \\ C \sum_{j \neq i}^K \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial z_j} g_i(x(t)) |z_i|^{r-2} z_i \nabla z_j \right| \leq \sum_{i=1}^K \left[d_i \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla |z_i|^{\frac{r}{2}}|^2 + \right. \\ \left. \frac{C^2}{d_i r^2 \varepsilon} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} g_i(x(t)) z_i + (r-1) g_i(x(t)) \right)^2 |z_i|^{r-2} \right] + \\ \sum_{j \neq i}^K \left[\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla z_j|^2 + \frac{C^2}{4 \varepsilon} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} g_i(x(t)) |z_i|^{r-1} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (11)$$

因为

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j \neq i}^K \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla z_j|^2 \leq \varepsilon C' \sum_{i=1}^K \int_{\Omega} d_i |\nabla |z_i|^{\frac{r}{2}}|^2$$

由式 (10) 和 (11) 可得

$$\left| \int_{\Omega} \left[\frac{|\Gamma|}{|\Omega|} \sum_{i=1}^K g_i(\mathbf{x}(t)) |z_i|^{r-2} z_i - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^K g_i(\mathbf{x}(t)) |z_i|^{r-2} z_i \right] \right| \leq \epsilon C' \int_{\Omega} d_i |\nabla |z_i|^{\frac{r}{2}}|^2 + \frac{C^2}{r^2 \epsilon} \sum_{i=1}^K \frac{1}{d_i} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} g_i(\mathbf{x}(t)) z_i + (r-1) g_i(\mathbf{x}(t)) \right)^2 |z_i|^{r-2} + \sum_{i=1}^K \sum_{j \neq i}^K \frac{C^2}{4 \epsilon} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} g_i(\mathbf{x}(t)) |z_i|^{r-1} \right)^2 \quad (12)$$

故由式 (9) 和 (10) 及 (12) 可得

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\|_{L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)}^r + \left[\frac{4(r-1)}{r^2} - \epsilon C' \right] \int_{\Omega} \sum_{i=1}^K d_i |\nabla |z_i|^{\frac{r}{2}}|^2 + G_r(\mathbf{x}(t)) \leq 0 \quad (13)$$

其中

$$G_r(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^K \left[\int_{\Omega} \left(f_i(\mathbf{s}) |s_i|^{r-2} s_i + \frac{|\Gamma|}{|\Omega|} g_i(\mathbf{s}) |s_i|^{r-2} s_i \right) - \frac{C^2}{d_i r^2 \epsilon} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial s_i} g_i(\mathbf{s}) s_i + (r-1) g_i(\mathbf{s}) \right)^2 |s_i|^{r-2} \right] - \sum_{i=1}^K \sum_{j \neq i}^K \frac{C^2}{4 \epsilon} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial s_j} g_i(\mathbf{s}) |s_i|^{r-1} \right)^2 \quad (\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_K) \in \mathbb{R}^K) \quad (14)$$

如果

$$\liminf_{|\mathbf{s}| \rightarrow \infty} \frac{G_r(\mathbf{s})}{\sum_{i=1}^K |s_i|^r} > 0 \quad \frac{4(r-1)}{r^2} - \epsilon C' \geq 0 \quad (15)$$

那么存在正常数 C_1, C_2, C_3 , 使得

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\|_{L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)}^r + C_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^K d_i |\nabla |z_i|^{\frac{r}{2}}|^2 + C_2 \|\mathbf{x}(t)\|_{L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)}^r \leq C_3 \quad (16)$$

这里 $C_1 = \frac{4(r-1)}{r^2} - \epsilon C' \geq 0, C_2, C_3 \geq 0$. 于是得到了 $L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)$ 中的耗散条件式 (15) 故有:

定理 2 假设 f_e, g_e 分别带指数 $\rho_{1i}, \rho_{2i} (1 \leq i \leq K)$ 并满足式 (7) 且式 (8) 成立, 定义函数 $G_r(\mathbf{s})$ 同式 (14) 且式 (15) 成立. 则有式 (16) 成立.

现考察初值在 $L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)$ 中时 f_e, g_e 在 $L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)$ 中次临界指数增长时全局吸引子的存在性.

定理 3 假设 f_e, g_e 在 $L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)$ 中次临界指数增长, 即 f_i, g_i 分别带指数 $\rho_{1i}, \rho_{2i} (1 \leq i \leq K)$ 并满足式 (7) 这里 $\rho_{1i} < \rho_f = 1 + \frac{2r}{N}, \rho_{2i} < \rho_g = 1 + \frac{r}{N}$, 且式 (15) 成立. 则式 (1) 在 $L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)$ 中有吸收集存在. 对任意的 $s \geq 1, 0 \leq \alpha < 1 + \frac{1}{s}, 0 \leq \beta < 1$ 在 $W^{\alpha, s}(\Omega, \mathbb{R}^K), C^{\beta}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^K)$ 中有吸收集存在. 式 (1) 在 $L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)$ 中有全局吸引子 A 存在, A 吸引 $L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)$ 中的有界集.

证明: 由定理 2 可知, 如果式 (15) 成立, 则存在 $C_2, C_3 > 0$, 使得

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\|_{L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)}^r + C_2 \|\mathbf{x}(t)\|_{L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)}^r \leq C_3$$

由 Gronwall 引理可知, 在 $L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)$ 中有吸收集存在, 且 $L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)$ 中有界集的轨道在 $L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)$ 是有界的. 由于 f_e, g_e 在 $L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)$ 中次临界指数增长, 故文献 [6] 中定理 2.2 中的 R 可以选取任意大. 此时可以在 $L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)$ 定义非线性半群 $\{\mathcal{S}(t); t \geq 0\}, \mathcal{S}(t)\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{z}_0), \mathbf{z}_0 \in L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)$. 在定理 3 的假设之下, 由文献 [6] 中定理 2.2 可知, 对任意的 $\mathbf{z}_0 \in L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)$, 有

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) \in \mathcal{A}(0, \tau_0], H_r^{2\theta}(\Omega, \mathbb{R}^K) \\ t^\theta \|\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_0)\|_{H_r^{2\theta}(\Omega, \mathbb{R}^K)} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \\ 0 < \theta < \gamma \\ t^\theta \|\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_{10}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{z}_{20})\|_{H_r^{2\theta}(\Omega, \mathbb{R}^K)} \leq \mathcal{A}(\theta_0, \tau_0) \|\mathbf{z}_{10} - \mathbf{z}_{20}\|_{L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)} \\ \forall t \in [0, \tau_0] \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 < \gamma \quad \forall \mathbf{z}_{10}, \mathbf{z}_{20} \in B_{L^r(\Omega, \mathbb{R}^K)}(\mathbf{y}_0, R) \end{cases} \quad (17)$$

同文献 [6-7], 选取 $\theta > 1/2$, 对任意大的 $R, t \in (0, \tau_0]$, 由式 (17) 可知

$$t^\theta \|\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_0)\|_{H_r^{2\theta}(\Omega, \mathbb{R}^K)} \leq M(R, \tau_0) \quad (18)$$

选初值在 $L^r(\Omega, R^K)$ 的吸收集中, 取 $t = \tau_0/2$, 由式(18)可得在 $H_r^{2\theta}(\Omega, R^K)$ 中有吸收集存在. 由于 $H_r^{2\theta}(\Omega, R^K) \subseteq H_r^1(\Omega, R^K) \subseteq L^r(\Omega, R^K)$ 是紧嵌入, 由此得到定义在 $L^r(\Omega, R^K)$ 上的半群是紧的, 故在 $L^r(\Omega, R^K)$ 中有全局吸引子存在. 其余证明同文献[8]中定理4.2的证明.

下面给出 f_e, g_e 在 $L^r(\Omega, R^K)$ 中临界指数增长时全局吸引子的存在性.

定理4 假设 f_e, g_e 在 $L^r(\Omega, R^K)$ 中临界指数增长, 对 $m > r$, 定义 $G_m(s)$ 同式(14)且式(15)式成立. 那么式(1)在 $L^r(\Omega, R^K)$ 中有全局吸引子存在, 定理3的结论均成立.

证明 因为在很短的时间内, $L^r(\Omega, R^K)$ 中有界集的轨道进入 $L^m(\Omega, R^K)$ 中, 故在定理的条件下, f_e, g_e 在 $L^m(\Omega, R^K)$ 中次临界指数增长, 同定理3的证明, 结论成立.

参考文献:

- [1] LAWRENCE C E. Partial differential equations[M]. Portland: American Mathematical Society, USA, 1998.
- [2] AMANN H. Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems[J]. Function Space, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Text Sur Mathematik(Teubner), 1993, 133: 9-126.
- [3] LI Xiao-jun. The blow-up and asymptotic behavior of the solutions of parabolic problems with nonlinear boundary conditions[D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2005.
- [4] 李晓军, 钟承奎. 非线性边界条件下抛物问题解的爆破[J]. 数学学报, 2007, 50(5): 981-988.
- [5] PAZY A. Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations[M]. New York: Springer-Verlag Inc., 1983.
- [6] ARRIETA J M, CARVALHO A N, RODRÍGUEZ-BERNAL A. Parabolic problems with nonlinear boundary conditions and critical nonlinearities[J]. J Differential Equations, 1999, 156: 376-406.
- [7] ARRIETA J M, CARVALHO A N. Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to Navier-Stokes and heat equation[J]. Transactions of the AMS, 1999, 352: 285-310.
- [8] RODRÍGUEZ-BERNAL A. Attractors for parabolic equations with nonlinear boundary conditions, critical exponents and singular initial data[J]. J Differential Equations, 2002, 181: 165-196.

Existence of global attractor for reaction-diffusion equations under nonlinear boundary conditions

LI Xiao-jun, SUN Zhong-xi

(College of Sciences, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: The asymptotic behaviors of solutions to the reaction-diffusion equations under nonlinear boundary conditions were taken into account. There existed a bounded absorbing set for the reaction-diffusion equations when the nonlinear terms f and g satisfied certain conditions. Using the regularity of the solutions, the existence of global attractor for the reaction-diffusion equations under strong or weak dissipative conditions were proved.

Key words: reaction-diffusion; nonlinear boundary condition; attractor