

无结构三角形网格下运动界面追踪的 WENO 有限体积法

卢长娜^{1,2}, 王如云¹, 孙建树²

(1. 河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 江苏 南京 210098;

2. 河海大学交通学院、海洋学院, 江苏 南京 210098)

摘要:在处理运动界面追踪问题的流体体积函数(VOF)法的基础上,给出了一种无结构三角形网格下的高分辨率的运动界面捕捉方法.该方法采用高精度的加权本质无振荡(WENO)有限体积格式离散 VOF 函数的空间导数,采用三阶 TVD Runge-kutta 方法离散时间导数,采用 Lax-Friedrichs 通量作为数值流通量.数值试验结果表明,用该方法来进行旋转速度场和剪切速度场的运动界面追踪,可以得到与理论解非常一致的追踪结果.

关键词:运动界面 追踪 流体体积函数法; WENO 格式 有限体积法 无结构三角形网格

中图分类号: O351.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1980(2009)01-0105-05

流体体积函数(volume of fluids, VOF)法是一种处理复杂运动界面的有效方法^[1-2].该方法是由 Hirt 等^[3]提出的, Noh 等^[4-5]对该方法进行了改进,使该方法有了进一步的发展和更广泛的适用性^[6].

VOF 运动界面追踪主要包括 2 个方面的内容:根据给定流速及重构好的运动界面来确定下一时刻流体体积函数 f 的值,称之为运动界面捕捉;根据给定的流体体积函数 f 的值确定运动界面位置,称之为运动界面重构.本文主要探讨运动界面追踪中的捕捉方法.

随着 VOF 法的不断完善,目前已出现了多种比较成熟的高分辨率的运动界面捕捉方法^[7-8],但这些方法大都基于结构网格,不便于直接推广到无结构网格.理论分析和数值试验证明, WENO 格式能基本无振荡准确地捕捉到间断解,而且在光滑和间断区域能达到高精度,性能稳定,收敛性好. WENO 格式已经成为计算流体力学中一类重要的计算格式,并得到了广泛的应用^[9-11].

本文采用高精度的加权本质无振荡(WENO)有限体积格式离散 VOF 函数的空间导数,采用三阶 TVD Runge-kutta 方法离散时间导数,采用 Lax-Friedrichs 通量作为数值流通量,从而构建了一种无结构三角形网格下的高分辨率的运动界面捕捉方法.

1 VOF 法

VOF 法的基本思想是:在整个流场中定义一函数 f ,每个网格中此函数的值为某种流体的体积与网格体积的比值.不包含这种流体的网格称为空网格,充满这种流体的网格称为满网格,包含界面的网格称为半网格.如果知道此函数任意时刻的每个网格上的值,就可以通过某种途径构造运动界面.

设计算区域是 Ω ,某种流体所在的区域记为 Ω_1 ,定义函数

$$\alpha(x, t) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_1 \\ 0 & x \notin \Omega_1 \end{cases}$$

在流场中, $\alpha(x, t)$ 满足 $\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$, 其中 $V = (u, v)$ 是流体的速度场矢量.以矩形网格 $I_{i,j}$ 为例,定义 $f_{i,j}$ 为 $\alpha(x, t)$ 在网格 $I_{i,j}$ 上的积分,即

收稿日期: 2007-12-26

基金项目: 河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室开放研究基金(2006413011) 教育部科学技术研究重点项目(104104) 江苏省普通高等学校高新技术产业发展项目(JH03-010) 国家科技支撑计划(2006BAG04B06)

作者简介: 卢长娜(1980—),女,山东菏泽人,博士研究生,主要从事水动力学数值模拟研究.

$$f_{i,j} = \frac{1}{\Delta V_{i,j}} \int_{I_{i,j}} \alpha(\mathbf{x}, t) dV$$

该函数称为 VOF 函数. 同样, $f_{i,j}$ 满足

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

该方程称为 VOF(volume of fluid) 方程.

容易看出, 每个单元上的流体体积函数实际上是

$$f = \frac{\text{单元中的流体体积}}{\text{单元体积}}$$

显然, 满足 $f=1$ 的网格充满流体, 本文将这种网格称为流体网格. 满足 $f=0$ 的网格内没有流体, 本文将这种网格称为空网格. 满足 $0 < f < 1$ 的网格内包含流体的运动界面, 本文将这种网格称为边界网格. 每个网格中的 f 值一旦求出, 就可以根据某种规则和周边网格的 f 值, 计算运动界面的斜率等, 构造出运动界面的具体位置.

2 WENO 有限体积格式

2.1 VOF 方程的守恒型格式

VOF 方程的守恒型格式可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial fu}{\partial x} + \frac{\partial fv}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

令 $F = (fu, fv)$, 则式(2)可写成

$$f_t + \nabla \cdot F = 0 \tag{3}$$

2.2 VOF 方程的离散

本文把单一的三角形单元作为控制元, 物理变量配置在每个单元的中心. 在三角形单元控制元 Ω_0 上对式(3)积分, 并利用 Green 公式将面积分化为线积分, 得

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_0} f d\Omega = - \sum_{k=1}^3 \int_{L_k} F \cdot n_k dl \tag{4}$$

式中: $L_k (k=1, 2, 3)$ —— Ω_0 的第 k 条边; n_k —— L_k 的单位外法向量. 利用 Gauss 积分公式, 有

$$\int_{L_k} F \cdot n_k dl \approx |L_k| \sum_{j=1}^q \omega_j F(f(G_j, t)) \cdot n_k \tag{5}$$

式中: G_j 为 Gauss 点; 当 $q=2$ 时, 令 $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, A_1, A_2 为线段的 2 个端点,

那么 $G_1 = \alpha A_1 + (1-\alpha) A_2, G_2 = (1-\alpha) A_1 + \alpha A_2$, 如图 1 所示; $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$.

记流体体积函数值的单元平均值为

$$\bar{f}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} f d\Omega$$

控制方程(3)的有限体积半离散化格式为

$$\frac{d}{dt} \bar{f}_i = - \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^3 |L_k| \sum_{j=1}^q \omega_j F(f(G_j, t)) \cdot n_k \tag{6}$$

用一阶 Lax-Friedrichs 数值通量 F^* 来近似地代替 $F(f(G_j, t))$, 即

$$F^*(f_j^+, f_j^-) \cdot n = \frac{1}{2} [(F(f^-(G_j, t)) + F(f^+(G_j, t))) \cdot n - \alpha (f^+(G_j, t) - f^-(G_j, t))]$$

式中: α —— $|F'(f)|$ 的上确界; $f^+(G_j, t), f^-(G_j, t)$ —— 高斯点 G_j 处三角形单元内部和外部的 f 值. 方程(6)左端时间项的离散采用三阶的 TVD Runge-kutta 离散格式.

因为只有流体体积函数的单元平均值是已知的, 所以需要构造流体体积函数在高斯点的值. 用 WENO 格式构造三角形单元上的加权多项式 $R(x, y)$, 用加权多项式在高斯点的值来近似地代替流体体积函数在高斯点值, 即 $f^\pm(G_j, t) = R(x_{G_j}, y_{G_j})$.

2.3 WENO 格式

本文采用三阶精度的 WENO 格式^[9] 重构过程. 构造三阶精度格式需用到 10 个网格的信息, 如图 1 所示. 对于三角形单元 Ω_0 , 记 3 个相邻的单元分别为 $\Omega_i, \Omega_j, \Omega_k$, Ω_i 的另 2 个相邻单元分别为 Ω_{ia}, Ω_{ib} , 以此类推.

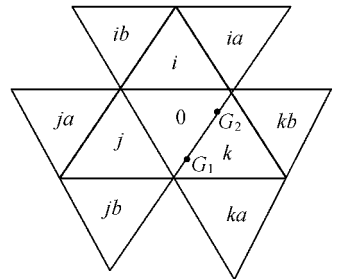


图 1 典型网格模板

Fig. 1 A typical mesh

a. 构造线性多项式. 对于三角形单元 Ω_0 , 给出 9 个小模板, 分别为 $S_1 = \{\Omega_0, \Omega_j, \Omega_k\}$, $S_2 = \{\Omega_0, \Omega_k, \Omega_i\}$, $S_3 = \{\Omega_0, \Omega_i, \Omega_j\}$, $S_4 = \{\Omega_0, \Omega_i, \Omega_{ia}\}$, $S_5 = \{\Omega_0, \Omega_i, \Omega_{ib}\}$, $S_6 = \{\Omega_0, \Omega_j, \Omega_{ja}\}$, $S_7 = \{\Omega_0, \Omega_j, \Omega_{jb}\}$, $S_8 = \{\Omega_0, \Omega_k, \Omega_{ka}\}$, $S_9 = \{\Omega_0, \Omega_k, \Omega_{kb}\}$. 在每个小模板上构造线性多项式 $P_1 \sim P_9$, 并且线性多项式满足 (以模板 S_1 为例)

$$\overline{P_1(x,y)}_{\Omega_l} = \bar{f}_l \quad (l = 0, j, k) \tag{7}$$

设 $P_1(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y$, 根据式(7), 可得到 3 个方程组, $P_1(x,y)$ 是唯一确定的不超过一次的多项式.

b. 构造加权因子. 对上面构造的线性多项式进行凸组合, 使加权多项式能达到三阶精度. 为确定线性权 $\gamma_l (l = 1, 2, \cdots, 9)$, 在大模板上构造一个二次多项式 $Q(x,y)$, 并使其在大模板上的单元平均值均等于 f 的单元平均值. 线性权 γ_l 可通过方程组

$$Q(x_G, y_G) = \sum_{l=1}^9 \gamma_l P_l(x_G, y_G) \quad \sum_{l=1}^9 \gamma_l = 1 \quad (\gamma_l \geq 0)$$

求解. 为了避免线性权所产生的强烈震荡, 采用 Jiang 等^[10] 给出的光滑因子和非线性权方法来衡量数值解的陡度和光滑程度. 对于一个 k 次多项式 $p(x,y)$, 定义光滑因子为

$$S = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\Omega|^{|\alpha|-1} (D^\alpha p(x,y))^2 dx dy$$

式中 α 是一个复指数, D 是偏导数, 则非线性权定义为

$$\omega_l = \frac{\tilde{\omega}_l}{\sum_l \tilde{\omega}_l} \quad \tilde{\omega}_l = \frac{\gamma_l}{(\epsilon + S_l)^2}$$

式中 S_l ——第 l 个多项式(P_l)的光滑度; ϵ ——很小的正数, 本文取 $\epsilon = 10^{-6}$. 用非线性权 ω_l 代替线性权 γ_l ,

$R(x,y) = \sum_{l=1}^9 \omega_l P_l(x,y)$ 即是 WENO 重构需要构造的多项式.

3 数值试验

为了验证本文给出的 WENO 有限体积运动界面追踪方法的适用性, 以剪切速度场和旋转速度场下的运动界面追踪为例进行数值试验. 一般来说, 运动界面的捕捉方法应当是高精度的数值方法, 在求解流体体积方程时不需要对运动界面进行重构, 运动界面的轮廓线可以由流体体积函数值的几条等值线获得^[7], 所以, 本文不对运动界面进行重构.

3.1 剪切速度场

二维剪切流场为

$$u(x,y) = \pi \cos(\pi(x - x_0)) \sin(\pi(y - y_0)) \quad v(x,y) = -\pi \sin(\pi(x - x_0)) \cos(\pi(y - y_0))$$

计算区域为 $[0,1] \times [0,1]$, 取 $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$, 初值界面为圆心是 $(0.5, 0.3)$ 、半径是 0.2 的圆周. 将计算区域剖分成 17352 个不规则三角形单元, 单元平均边长约为 0.0115. 先用本文给出的追踪方法计算到 $t = 1.0\text{ s}$ 和 $t = 2.0\text{ s}$, 再以此结果作为初值, 将速度反号, 分别反剪切到 $t = 1.0\text{ s}$ 和 $t = 2.0\text{ s}$, 计算结果如图 2 所示.

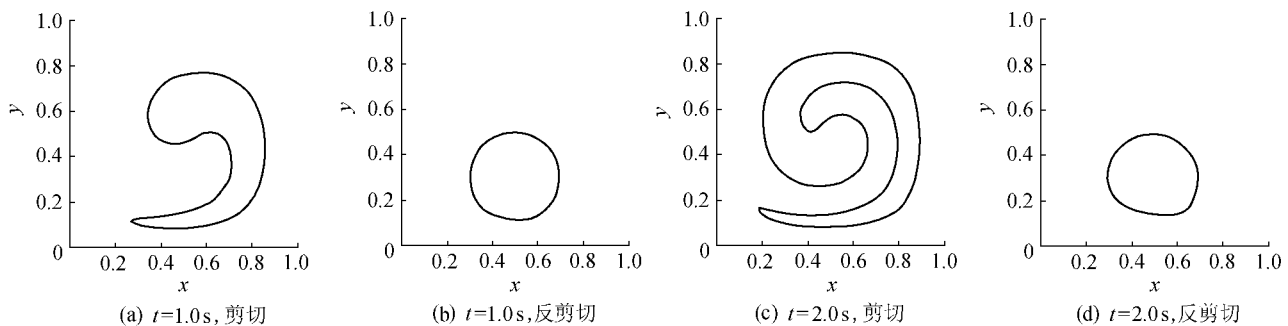


图 2 剪切速度场剪切及反剪切计算结果

Fig. 2 Computed results of shear and inverse shear of shear velocity field

从图 2 可以看出,剪切速度场运动界面的捕捉结果比较理想,反剪切的界面形状与剪切速度场的初始值几乎一样, $t=1.0\text{ s}$ 的反剪切捕捉结果更好.因此,在无结构三角形网格下,用 WENO 有限体积法来追踪运动界面是可行的.

3.2 旋转速度场(Zalesak 问题)

旋转流场为

$$u(x,y)=-\pi(y-y_0) \quad v(x,y)=\pi(x-x_0)$$

计算区域为 $[0,1]\times[0,1]$,取 $(x_0,y_0)=(0.5,0.5)$,初值界面为有缺口的圆周.网格剖分情况与 3.1 一样.用本文给出的追踪方法分别计算到 $t=0.5\text{ s}$, $t=1.0\text{ s}$, $t=1.5\text{ s}$ 和 $t=2.0\text{ s}$,结果如图 3 所示.

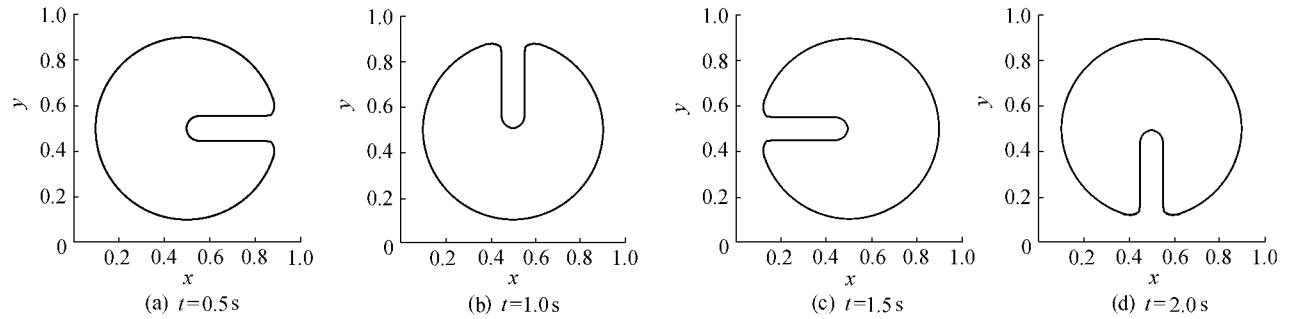


图 3 旋转速度场计算结果

Fig. 3 Computed results of the Zalesak problem

从图 3 可以看出,本文给出的追踪方法较好地捕捉到了旋转速度场的运动界面,仅在界面缺口的拐角处有些抹平,这与文献[7]矩形网格剖分下的模拟结果非常一致.

4 结 语

本文在处理运动界面追踪问题的流体体积函数(VOF)法的基础上,用高阶精度的 WENO 有限体积格式离散 VOF 函数的空间导数,用 Lax-Friedrichs 作为数值通量格式,用三阶 TVD Runge-kutta 方法离散时间导数,并通过编程构建了一种无结构三角形网格下的高分辨率的运动界面捕捉方法.剪切速度场和旋转速度场运动界面追踪模拟结果表明,该方法不仅适用性好,而且精度和分辨率较高.

参考文献:

[1] SHEN Yong-ming,NG C O,ZHENG Yong-hong. Simulation of wave propagation over a submerged bar using the VOF method with a two-equation k-turbulence modeling[J]. Ocean Engineering,2004,31(1) 37-95.

[2] LÖRSTAD D,FUCHS L. High-order surface tension VOF-model for 3D bubble flows with high density ratio[J]. Journal of Computational Physics,2004,200(1) 153-176.

[3] HIRT C W,NICHOLS B D. Volume of fluid(VOF) method for the dynamics of free boundaries[J]. Journal of Computational Physics, 1981,39(1) 201-225.

[4] NOH W F,WOODWARD P. Simple line surface calculation. lecture notes in physics[M]. New York Springer,1976 39.

[5] ASHGRIZ N,POO J Y. FLAIR flux line-segment model for advection and interface reconstruction[J]. Journal of Computational Physics, 1991,93(2) 449-468.

[6] 张光碧,邓军,张法星,等. VOF 模型在有支流汇入的河道复杂流场中的应用[J]. 河海大学学报:自然科学版,2007,35(5): 592-595.

[7] 刘儒勋,刘晓平,张磊,等. 运动界面的追踪和重构方法[J]. 应用数学和力学,2004,25(3) 279-290.

[8] JAMES A J,LOWENGRUB J. A surfactant-conserving volume-of-fluid method for interfacial flows with insoluble surfactant[J]. Journal of Computational Physics,2004,201(2) 685-722.

[9] HU Chang-qing,SHU Chi-wang. Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes[J]. Journal of Computational Physics, 1999,150(1) 97-127.

[10] JIANG Guang-shan,Shu Chi-wang. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. Journal of Computational Physics,1996,126 (1) 202-228.

[11] 刘儒勋,王志峰.数值模拟方法和运动界面追踪[M].合肥 中国科学技术大学出版社,2001.

WENO finite volume method for tracking moving interfaces on unstructured triangle meshes

LU Chang-na^{1, 2}, WANG Ru-yun¹, SUN Jian-shu²

(1. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China ;

2. College of Traffic, College of Ocean, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract : A method of tracking moving interface with high resolution on unstructured triangle meshes was proposed based on the VOF. It employed the finite volume WENO scheme with high resolution to discretize the space derivatives of the VOF, the third-order TVD Runge-Kutta method to discretize the time derivatives, and the Lax-Friedrichs flux to be as the numerical flux. The numerical test results show that the present method can track the moving interfaces in the Zalesak and the shear flow problems, and the numerical results agree well with the theoretical ones.

Key words : moving interface ; tracking ; VOF ; WENO scheme ; finite volume method ; unstructured triangle mesh

.....

《水利水电科技进展》征订启事

(邮发代号 28-244, CN32-1439/TV, ISSN1006-7647, 双月刊, A4 开本)

《水利水电科技进展》由河海大学主办,是全国中文核心期刊,中国科技核心期刊,全国水利系统优秀期刊,华东地区优秀期刊,江苏省优秀期刊.主要刊登水科学、水工程、水资源、水环境、水管理方面的科技论文,主要栏目有水问题论坛、研究探讨、工程技术、水管理、专题综述、国外动态等,适合与水科学、水工程、水资源、水环境、水管理有关的科研、工程、管理人员以及大专院校师生阅读.

本刊由邮局发行,邮发代号 28-244,2009 年每期定价 10 元,全年 6 期共计 60 元.可在全国各地邮局订阅,也可直接向编辑部订阅.

编辑部地址 210098 南京市西康路 1 号《水利水电科技进展》编辑部.

电话/传真 025-83786335

E-mail jz@hhu.edu.cn

http://kkb.hhu.edu.cn/index_jz.htm