

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2009.02.007

分布式 TOPKAPI 模型的数值解法及其应用

邓 鹏¹ 李致家¹ 刘志雨²

(1.河海大学水文水资源学院 ,江苏 南京 210098 2.水利部水文局 ,北京 100053)

摘要 :为了提高分布式 TOPKAPI 模型的计算精度 ,用数值分析的方法对模型非线性水库方程进行求解 .通过分析得出非线性水库方程的一般格式 ,运用四阶龙格库塔算法建立求解数值解的递推关系式 ,并且通过变步长链提高算法的效率 ,保证递推关系式的收敛和稳定 .利用变步长的四阶龙格库塔算法在 1 km 网格精度下对布柳河流域进行洪水模拟 ,模型率定期和检验期的确定性系数分别达到了 0.908 和 0.912 .

关键词 :TOPKAPI 模型 ;龙格库塔 ;布柳河 ;洪水模拟
中图分类号 :P338.2 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2009)02-0158-04

TOPKAPI 模型是一个以物理概念为基础的分布式流域水文模型 .模型自 1995 年提出至今经过了一系列的发展 .最新的 TOPKAPI 模型对壤中流计算进行了调整 ,增加了土壤水深层渗漏以及其他模块^[1-2] .TOPKAPI 模型可以利用数字高程图(DEM)、土壤分布图、土地利用图等信息识别模型结构和参数 .模型假定土壤及地表网格内侧向水流运动可用运动波模型来模拟 ,将建立在空间点上的假设在一定的空间尺度上进行积分 ,从而把初始的微分方程转变为非线性水库方程 .

最新的 TOPKAPI 模型中非线性水库方程采用基于适当近似的解析法求解 .该方法对指数项用二次方程近似 ,二次方程的系数通过最小二乘法得到 ,从而将复杂的指数方程转化为低阶方程并得到解析解 .但该方法在对指数项的近似中有明显的舍入误差 ,并且二次方程系数也难以确定 .为了提高模型的计算精度 ,本文采用变步长的四阶龙格库塔算法求解 TOPKAPI 模型方程 ,并将该算法应用于布柳河流域 .

1 模型基本原理

TOPKAPI 模型的流域特性参数、降水和水文响应的空间分布在水平方向用正交网格系统(DEM 的方网格) ,在垂直方向用各网格所对应的水平土柱进行模拟 .每个网格均是体现模型物理特性(质量平衡和动量平衡) 的 1 个计算节点 .根据相邻网格的最小能量原理 ,将活动网格与周边 4 个相邻网格联系起来 ,并假定活动网格只能与 1 个下游网格相联系 ,但可以从其他 3 个网格接受上游来水 .在上层非饱和区有 :

$$\frac{dv_1}{dt} = [(f_a X + q_{uo} + q_{us}) - f_b X] - \frac{C_1}{X^{\alpha_s}} v_1^{\alpha_s} \tag{1}$$

式中 : v_1 ——网格单元内的上层蓄水量 ; t ——时间 ; f_a ——降水入渗 ; X ——网格大小 ; q_{uo} ——地面径流输入 ; q_{us} ——壤中侧向入流 ; f_b ——深层渗漏 ; C_1 ——局地传导系数 ; α_s ——反映上层土壤透水特性的指数 .与壤中径流的模拟相似 ,应用曼宁阻力定律 ,近似用运动波方程来描述水在地面上和河道中任一处水平方向上的运动 ,将偏微分运动波方程积分到网格尺度上 ,就能分别得到结构相似的非线性水库方程 :

$$\frac{dv_0}{dt} = r_0 X^2 - \frac{C_0 X}{X^{10/3}} v_0^{5/3} \tag{2}$$

$$\frac{dv_c}{dt} = (r_c XW + Q_{uc}) - \frac{C_c W}{(XW)^{5/3}} v_c^{5/3} \tag{3}$$

收稿日期 :2008-04-23
基金项目 :国家自然科学基金(50479017)
作者简介 :邓鹏(1983—) ,男 ,江苏兴化人 ,博士研究生 ,主要从事水文预报研究 .

式中： v_0, v_c ——地面和河道水库蓄水量； r_0 ——地面径流深； r_c ——旁侧入流； Q_{uc} ——上游河道径流输入； W ——河道断面宽度； C_0, C_c ——与曼宁公式有关的系数。模型具体介绍见有关文献^[3-7]。

2 数值解法

TOPKAPI 模型中非线性水库方程可以写成一般格式：

$$\frac{dv}{dt} = a - bv^c$$

(4)

式中 v 满足利普希茨条件(Lipschitz condition) ,从理论上可以保证其初值问题 $v(t_0)= v_0$ 的解存在并且唯一。对式(4)离散化 ,采用经典的四阶龙格库塔算法建立求解数值解的递推公式：

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

(5)

其中

$$K_1 = a - bv_n^c \quad K_2 = a - b\left(v_n + \frac{h}{2} K_1 \right)^c$$
$$K_3 = a - b\left(v_n + \frac{h}{2} K_2 \right)^c \quad K_4 = a - b\left(v_n + hK_3 \right)^c$$

式中： h ——步长 ,可以证明其截断误差为 $O(h^5)$; a, b ——常数。

单从每一步看 ,步长越小 ,截断误差就越小 ,但随着步长的缩小 ,在一定求解范围内所要完成的步数就增加。步数的增加不但引起计算量的增大 ,而且可能导致舍入误差的严重积累^[8-9]。考察式(5) ,从节点 t_n 出发 ,先以 h 为步长求出一个近似值 ,记为 $v_{n+1}^{(h)}$ 。然后将步长折半 ,即取 $\frac{h}{2}$ 为步长从 t_n 跨 2 步到 t_{n+1} ,再求得 1 个近似值 $v_{n+1}^{(h/2)}$ 。这样 ,通过检查折半前后 2 次计算结果的偏差 $\Delta = | v_{n+1}^{(h/2)} - v_{n+1}^{(h)} |$ 来判定所选的步长是否合适。具体地说 ,分为以下 2 种情况处理：

- a. 对于给定的精度 ϵ ,如果 $\Delta > \epsilon$,反复将步长折半进行计算 ,直至 $\Delta < \epsilon$ 为止 ,取最终得到的 $v_{n+1}^{(h/2)}$ 作为结果；
- b. 如果 $\Delta < \epsilon$,反复将步长加倍 ,直至 $\Delta > \epsilon$ 为止 ,这时再将步长折半一次 ,得到所要结果。
- 从表面上看 ,变步长的方法为了选择步长 ,每一步的计算量增加了 ,但该方法保证了递推式的收敛和稳定。

3 应 用

3.1 流域概况

布柳河流域位于珠江流域西江水系的中上游 ,流域集水面积 3 310 km²。流域辖区属于副热带季风气候区 ,冬季受蒙古冷高压控制 ,干燥少雨 ,夏季受热带气团、东南季风和西南季风交替或同时影响 ,雨量充沛。流域多年平均降雨量 1 193 mm。降雨年内分配不均 ,年降雨量主要集中在 5 ~ 10 月 ,约占全年总降雨量的 83%。布柳河流域主要水系见图 1。

3.2 资料情况及其处理

流域的数字高程、土壤类型、土地利用资料可以从因特网上获取^[10-12] ,见图 2。根据研究流域内测站分布情况 ,选用加尤、新化等 6 个雨量站和平腊水文站 2001 ~ 2003 年汛期资料进行模型参数的率定 ,时段为 1 h ,网格尺度为 1 km。采用 2004 ~ 2006 年汛期资料进行模型检验。从因特网上获取的土地利用资料年份与率定、检验年份相匹配。利用泰森多边形法进行降雨量插值 ,将点雨量资料扩展到流域面上。由于气温资料难以获得 ,本文采用与流域临近的天峨水文站观测水面蒸发资料用于蒸散发模块的计算。

3.3 模型参数率定与检验

理论上 ,具有明确物理意义的参数值不需要率定 ,可直接量测得到。然而 ,由于量测值是基于量测点获得的 ,面上代表性不够 ,加之有些参数时空变化幅度较大 ,难以通过实测来确定 ,因而实际应用中仍需要参数率定。TOPKAPI 模型率定期和检验期的确定性系数分别为 0.908 和 0.912 ,主要产汇流参数分别见表 1、表 2。表

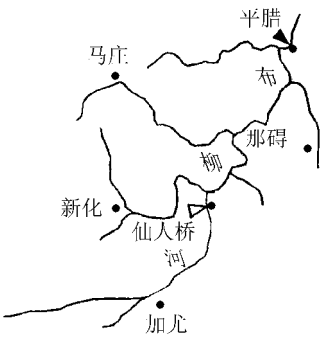


图 1 布柳河流域主要水系
Fig. 1 Main tributaries of
Buliu River watershed

中 k_{shl} 为水平方向饱和导水率, k_{svl} 为垂直方向饱和导水率, v_f 为田间持水量, v_r 为残存含水量, v_s 为饱和含水量, α_p 为渗漏指数, L 为土壤厚度, n_o 为地表曼宁糙率系数, n_c 为河床曼宁糙率系数. TOPKAPI 模型率定、检验计算流量与实测流量过程对比见图 3.



图 2 布柳河流域 DEM、土壤类型及土地利用情况

Fig. 2 DEM, soil type and land use of Buliu River watershed

表 1 TOPKAPI 模型主要产流参数

Table 1 Main parameters of runoff generation in TOPKAPI model

土壤类型	$k_{shl}/(10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$	$k_{svl}/(10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$	$v_f - v_r$	$v_s - v_r$	α_s	α_p	L/m
黏壤土	4.92	2.46	0.312	0.432	2.5	20.0	0.30
黏土	8.83	4.42	0.275	0.385	2.5	25.8	0.20

4 结 语

本文采用变步长的四阶龙格库塔算法求解分布式 TOPKAPI 模型中的非线性水库方程,对布柳河流域进行洪水模拟.模型计算结果获得了较高的确定性系数.相对于基于适当近似的解析法,该算法不需要对方程中复杂的指数项进行近似计算,减小了计算结构带来的误差.变步长方法的使用提高了计算速度,同时保证了递推关系式的收敛和稳定.分布式水文模型一般会存在很多微分方程,对方程的有效求解也是决定模型成功应用的重要因素.对于不存在指数项的方程,数值解法中往往采用差分算法.本文中 TOPKAPI 模型的非线性水库方程含有指数项,采用四阶龙格库塔算法更为合理并且有较高精度,这为含有指数项方程的 TOPKAPI 模型数值求解提供了 1 个方法和算例.

表 2 TOPKAPI 模型主要汇流参数

Table 2 Main parameters of flow concentration in TOPKAPI model

植被类型	$n_o/(\text{m}^{-1/3} \cdot \text{s}^{-1})$	Strahler 河流等级	$n_c/(\text{m}^{-1/3} \cdot \text{s}^{-1})$
常绿针叶林	0.400	I	0.0200
常绿阔叶林	0.400	II	0.0150
阔叶落叶林	0.300	III	0.0100
混合林	0.250	IV	0.0050
林地	0.200		
林地草地	0.150		
草地	0.095		
农田	0.085		

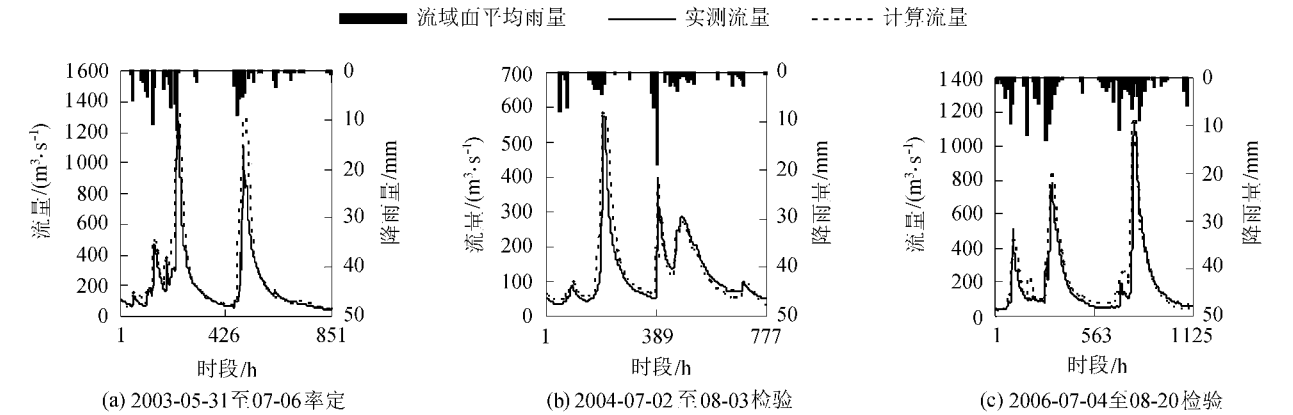


图 3 流量模拟过程线

Fig. 3 Hydrographs of discharge simulation

参考文献：

[1] 刘志雨 ,谢正辉. TOPKAPI 模型的改进及其在淮河流域洪水模拟中的应用研究[J]. 水文 , 2003 , 23(6) :1-7.

[2] 刘志雨. 基于 GIS 的分布式托普卡匹水文模型在洪水预报中的应用[J]. 水利学报 , 2004(4) :70-75.

[3] TODINI E ,CIARAPICA L. Mathematical models of large watershed hydrology[M]. Littleton :Water Resources Publications ,2001.

[4] LIU Zhi-yu ,TODINI E. Towards a comprehensive physically-based rainfall-runoff model[J]. Hydrology and Earth System Sciences ,2002 , 106(5) :859-881.

[5] LIU Zhi-yu. Toward a comprehensive distributed/lumped rainfall-runoff model :analysis of available physically-based models and proposal of a new TOPKAPI mode[D]. Bologna :The University of Bologna ,2002.

[6] FAIRFIELD J ,LEYMARIE P. Drainage network from grid digital elevation models[J]. Water Resources Research ,1991 ,27(5) :709-717.

[7] VERDIN J P ,KLAVER R W. Grid cell based crop water accounting for the famine early warning system[J]. Hydrological Processes , 2002 ,16(8) :1617-1630.

[8] 邓鹏 ,李致家. 基于人工神经网络的降雨径流模型研究[M]//环境变化与水安全. 北京 :中国水利水电出版社 ,2008 :38-41.

[9] 李致家 ,姚成 ,汪中华. 基于栅格的新安江模型的构建和应用[J]. 河海大学学报 :自然科学版 ,2007 ,35(2) :131-134.

[10] USGS CTOPO3[EB/OL]. [2008-04-02]. <http://edcwww.cr.usgs.gov/>.

[11] UMD 1 km global land cover[EB/OL]. [2008-04-02]. <http://www.geog.umd.edu/landcover/>.

[12] GLDAS global soils dataset of Reynold[EB/OL]. [2008-04-02]. <http://www.ngdc.noaa.gov/>.

Numerical algorithm of distributed TOPKAPI model and its application

DENG Peng¹ , LI Zhi-jia¹ , LIU Zhi-yu²

(1. College of Hydrology and Water Resources , Hohai University , Nanjing 210098 , China ;
2. Bureau of Hydrology , Ministry of Water Resources , Beijing 100053 , China)

Abstract : For the sake of improving the calculation precision of the distributed TOPKAPI model , a numerical algorithm was applied to solve the non-linear reservoir differential equations in the model. The general form of these equations was derived. The recurrence formula was constituted using the algorithm of the fourth-order Runge-Kutta method. The method of variable steps improved the efficiency of the algorithm and guaranteed the convergence and stability of the formula. The numerical algorithm of the fourth-order Runge-Kutta with variable steps was applied in the flood simulation of the Buliu River watershed with a grid precision of one kilometer. The deterministic coefficients of model calibration and validation reached 0.908 and 0.912 , respectively.

Key words : TOPKAPI model ; Runge-Kutta ; Buliu River ; flood simulation