

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2009.02.009

一种实用的土体统一弹塑-黏塑性本构模型

王向余¹,刘华北²,宋二祥¹

(1.清华大学土木工程系,北京 100084;2.纽约城市大学土木工程系,纽约 10031)

摘要:针对以往本构模型或过于简单而不能全面描述土体的性质,或过于复杂而不便于应用的问题,以非线性弹性、弹塑性、艳正曼辛准则及 Singh-Mitchell 蠕变模型为基础,并将曼辛准则扩展至三维,建立了一种简单实用而又能同时合理地考虑土体非线性、动力滞回和流变特性的统一弹塑-黏塑性本构模型.通过试验模拟,验证了该模型的合理有效性.

关键词:本构模型 弹塑-黏塑性 蠕变 动力滞回 曼辛准则

中图分类号: TU435 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1980(2009)02-0166-05

土体的力学行为非常复杂,一般具有较明显的非线性、动力滞回和流变(尤其是黏性土)等特性,要通过数学方法全面而又合理地描述土体的这些性质是比较困难的.近几十年来,土体本构模型的研究得到了广泛关注,各国学者提出了数以百计的模型.但是,这些模型或过于简单而无法描述土体的各种复杂力学性质^[1],或过于复杂^[2]而不便于应用.基于此,本文以非线性弹性、弹塑性、修正曼辛准则及 Singh-Mitchell 蠕变模型为基础,并将曼辛准则扩展至三维,建立一种简单实用而又能同时合理考虑土体上述力学性质的统一弹塑-黏塑性本构模型.笔者编制了该模型的程序并添加到 ABAQUS 有限元软件中,最后,通过试验对比,模拟验证了该模型的合理有效性.

1 模型简介

基本假定和简化处理:(a)假定土体屈服前的行为为非线性弹性;(b)采用修正曼辛准则描述土体的动力滞回特性;(c)只考虑土体的剪切蠕变,并假定土体在一定应力范围之内(剪应力水平较低时)没有蠕变变形.

土体的应变增量 $d\epsilon_{ij}$ 由以下几个部分组成:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij,n} + d\epsilon_{ij,c} = d\epsilon_{ij,e} + d\epsilon_{ij,p} + d\epsilon_{ij,c} \tag{1}$$

其增量本构方程为

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}d\epsilon_{kl,e} = D_{ijkl}(d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl,p} - d\epsilon_{kl,c}) \tag{2}$$

其中

$$d\epsilon_{ij,n} = d\epsilon_{ij,e} + d\epsilon_{ij,p}$$

式中: $d\epsilon_{ij,n}, d\epsilon_{ij,e}, d\epsilon_{ij,p}, d\epsilon_{ij,c}$ ——与时间无关、弹性、塑性及蠕变应变增量; D_{ijkl} ——当前弹性刚度阵.

当剪应力水平较低时,土体只发生非线性的弹性变形;当土体剪应力水平相对较高而未屈服时,其变形由弹性变形和蠕变变形 2 部分组成;而当土体屈服时,其变形则同时包含弹性变形、塑性变形及蠕变变形.

1.1 弹性行为

土体的行为一般具有明显的非线性,在反复加卸载时还具有较明显的滞回特性.本文采用非线性的剪切模量 G 和体积模量 K 作为弹性参数,假定土体单调加载时剪应力 τ 与率无关剪应变 γ_n 之间满足双曲线关系:

$$\tau = \frac{\gamma_n}{a + b\gamma_n} \tag{3}$$

类似于 Duncan-Chang 模型的推导,可以有

$$a = 1/G_{\max} \quad b = 1/\tau_{u,n}$$

收稿日期:2008-03-21

基金项目:国家自然科学基金(50408002)

作者简介:王向余(1979—),男,天津人,博士研究生,主要从事岩土工程研究.

式中: $G_{\max}$ ——土体的初始剪切模量; $\tau_{u,n}$ ——该双曲线的应力极限值.

定义 $\tau_{u,n} = \tau_f / R'_f$, τ_f 为土体的屈服应力,由于 $\tau_{u,n}$ 与 Duncan-Chang 双曲线模型中应力极限值 τ_u 的概念有所区别,参数 R'_f 也可能会不同于传统的破坏比 R_f ,它可以通过拟合相应的试验曲线得到. $G_{\max}$ 与平均正应力 p 相关,假定

$$G_{\max} = G_0 p_a (p/p_a)^{n_G} \tag{4}$$

式中 p_a 为大气压. 参数 G_0 和 n_G 可以通过动三轴或低剪应力水平、较高加载速率(此时,土体的蠕变率很小,蠕变变形可近似忽略)的常规三轴试验得到. 对式(3)求导,可以得到单调加载时的土体剪切模量表达式

$$G = \frac{G_{\max}}{(1 + R'_f G_{\max} |\gamma_n| / \tau_f)^2} \tag{5}$$

在弹性卸载与反加载时,采用修正曼辛准则^[3]描述土体的反应,则土体卸载和反加载时的剪切模量可以表示为

$$\begin{cases} G_u = \frac{G_{\max}}{k_1 (1/k_1 + 0.5 R'_f G_{\max} |\gamma_n - \gamma_{u,n}| / \tau_f)^2} \\ G_r = \frac{G_{\max}}{k_2 (1/k_2 + 0.5 R'_f G_{\max} |\gamma_n - \gamma_{u,n}| / \tau_f)^2} \end{cases} \tag{6}$$

式中 k_1, k_2 分别为卸载和反加载时土体初始剪切模量与 $G_{\max}$ 的比值,可以通过拟合相应的滞回曲线得到. 当 $k_1 = k_2 = 1.0$ 时,式(6)即为传统的曼辛准则. 试验结果表明,土体初始卸载模量并不总是等于 $G_{\max}$,它可以大于 $G_{\max}$,也可以小于 $G_{\max}$,二者甚至相差较大,并且这种差别与土的类型、软硬及应变水平等因素有关^[4]. 此外,从理论上讲,对于等幅循环荷载作用,若采用传统的曼辛准则(如果不考虑蠕变变形),则会得出各个周期滞回圈重合而不发生沿应变轴移动(即无应变累积)的与很多试验现象不符的结论,因此,这里引入参数 k_1, k_2 ,也为更好地拟合滞回曲线带来了一定的便利性.

以上是针对一维情况而言的. 在三维条件下,可以采用八面体剪应力 τ_8 和率无关八面体剪应变 $\gamma_{8,n}$ 对其进行扩展,即在单调加载条件下

$$\tau_8 = \frac{\gamma_{8,n}}{a + b \gamma_{8,n}} \tag{7}$$

同样,可以得到其单调加载时的剪切模量

$$G = \frac{G_{\max}}{(1 + R'_f G_{\max} \gamma_{8,n} / \tau_{8f})^2} \tag{8}$$

然而,由于 τ_8 和 $\gamma_{8,n}$ 始终非负,为了能够考虑一维循环单剪试验(应力、应变都可以为负值)的情况,不仅需要建立合理的加卸载准则,同时在卸载或反加载过程中还要对曼辛准则进行合理的扩展.

对于弹性加卸载准则,首先定义一个和率无关偏应变 $e_{ij,n}$ 相关的矢量^[5-6]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} (e_{11,n}, e_{22,n}, e_{33,n}, \sqrt{2} e_{12,n}, \sqrt{2} e_{13,n}, \sqrt{2} e_{23,n})$$

满足 $|\boldsymbol{\varepsilon}| = \gamma_{8,n}$. 然后,以该矢量在当前步增量和上一步增量的内积作为标准,如果 $d\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_t < 0$,则把当前点作为一个荷载反向点. 而如果 $d\boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_t \geq 0$,则本步将持续上一步的加卸载状态.

在弹性卸载或反加载过程中,如果直接简单地对式(7)应用(修正)曼辛准则,则对图 1 所示的循环单剪情况,位于同一卸载曲线段 ABC 上的 D、E 2 点,由于 $\gamma_{8D,n} = \gamma_{8E,n} = \gamma_0$,就会得出 D、E 2 点剪切模量相等的不合理结论. 为此,笔者提出了如下的扩展思路与方法:

在卸载或反加载过程中,(修正)曼辛准则的实质可以广义地理解为:土体的剪切模量是当前点与荷载转向点之间在应变轴方向“距离”的函数,并且随着这种“距离”的增大而减小. 采用本文定义的矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}$,荷载转向点处的该矢量记为 $\boldsymbol{\varepsilon}_C$ (对于卸载点和反加载点 $\boldsymbol{\varepsilon}_C$ 分别对应于 $\boldsymbol{\varepsilon}_u, \boldsymbol{\varepsilon}_r$),则这种“距离”可以用矢量 $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_C$ 的模 $|\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_C|$ 表示. 这样,当前点的剪切模量可表示为

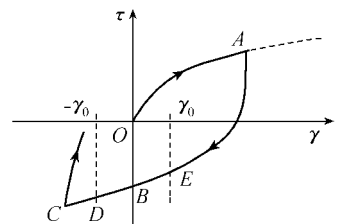


图 1 循环单剪时 τ - γ 曲线
Fig. 1 τ - γ curves under cyclic shear condition

$$\begin{cases} G_u = \frac{G_{\max}}{k_1(1/k_1 + 0.5R'_f G_{\max} |\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_u|/\tau_{8f})^2} \\ G_r = \frac{G_{\max}}{k_2(1/k_2 + 0.5R'_f G_{\max} |\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_r|/\tau_{8f})^2} \end{cases} \quad (9)$$

容易验证,在一维循环单剪情况下,式(9)与式(6)是完全一致的。

对于土体的弹性体积模量 K ,无论土体处于何种加载状态,均假定其只与平均正应力 p 相关,表达式为

$$K = K_0 p_a (p/p_a)^{n_K} \quad (10)$$

式中 K_0, n_K 为模型参数. 参数 G_0, n_G, K_0, n_K 的选择要保证土体的泊松比 ν 能满足 $-1 \leq \nu \leq 0.5$ 的限制条件. 如果选取 $n_G = n_K$,则容易验证该条件始终可以得到满足. 对于一般土体,根据经验^[7],可以取 $n_G = 0.5$,因此,笔者建议,无试验资料时取 $n_G = n_K = 0.5$ 进行计算。

1.2 塑性行为

土体的屈服面用 D-P 屈服函数描述：

$$f = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - k = 0 \quad (11)$$

这里,将其在 p - q 空间表示为

$$f = q - p \tan \beta - d = 0 \quad (12)$$

式中 β, d 分别为屈服面在 p - q 空间的倾角和截距,可以根据具体的受力状态(如平面应变或三轴压缩等)通过土体的黏聚力 c 和内摩擦角 φ 换算得到^[8].

塑性势函数 g 采用 ABAQUS 中给出的双曲线形式^[8],如图 2 所示,其表达式为

$$g = \sqrt{(\varepsilon \bar{\sigma}|_0 \tan \psi)^2 + q^2} - p \tan \psi \quad (13)$$

其中

$$\bar{\sigma}|_0 = d/(1 - \tan \beta/3)$$

式中 $\bar{\sigma}|_0$ ——等效单轴压缩的初始屈服应力; ψ —— p - q 空间下土体的剪胀角; ε ——与双曲线曲率相关的参数,一般可以取 $\varepsilon = 0.1$ 。

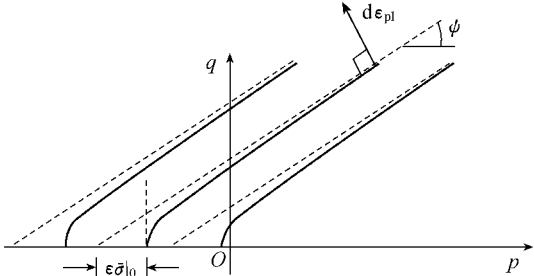


图 2 p - q 空间下双曲线型塑性势函数

Fig. 2 Hyperbolic plastic potential function in p - q plane

当土体从弹性状态进入屈服或者处于塑性加载状态时,考虑到土体本身已经处于塑性流动的软化状态,认为此时剪切模量只与围压相关,即 $G = G_{\max}$. 而当土体从屈服状态塑性卸载至弹性状态时,则把塑性卸载点作为一个荷载反向点,按式(9)计算其后弹性状态的剪切模量. 从某种意义上讲,屈服面克服了传统的基于曼辛准则建立的非线性弹性模型应力‘越界’(即超过屈服强度)的不合理现象。

1.3 黏塑性蠕变行为

土体(尤其是黏性土)在较高的偏应力水平下,一般具有较明显的蠕变现象. 本文采用了 ABAQUS 中给出的一种黏塑性蠕变模型^[8],它通过单轴压缩等效,利用 Singh-Mitchell 模型来描述土体的剪切蠕变行为：

$$\bar{\varepsilon}_c = A \exp(\xi \bar{\sigma}_c) (t_1/t)^m \quad (14)$$

其中

$$\bar{\sigma}_c = (q - p \tan \beta)/(1 - \tan \beta/3)$$

式中 $\bar{\varepsilon}_c, \bar{\sigma}_c$ ——等效单轴压缩的蠕变应变和蠕变应力,容易发现在单轴压缩条件下, $\bar{\sigma}_c$ 等于相应的压应力; t_1 ——单位时间; A, ξ, m ——模型参数, m 一般在 0.75 ~ 1.0 之间。

在 ABAQUS 中,规定只有 $\bar{\sigma}_c > 0$ 或 $q > p \tan \beta$ 即偏应力水平较高时,土体才发生蠕变,如图 3 中的阴影部分所示. 土体的剪切蠕变试验一般是在有一定围压 σ_3 下($p \neq 0$)的三轴仪中进行的,通过不同围压与不同偏应力 $q = \sigma_1 - \sigma_3$ (或偏应力水平)下的蠕变曲线,可以得到以偏应力 q 为基准的一套蠕变参数. 严格地讲,此时上文定义的 $\bar{\sigma}_c \neq q$. 然而,蠕变试验(无论是否排水)结果表明^[9-11] 在偏应力水平较低时,土体的蠕变变形很小. 因而式(14)中采用 $\bar{\sigma}_c$ 而不是 q ,基本上是符合试验现象的. 此外,对于砂土,由于计算时一般均假定其没有黏聚力,即 $d = 0$,这样,采用黏塑性蠕变模型就无法考虑砂土的蠕变变形. 不

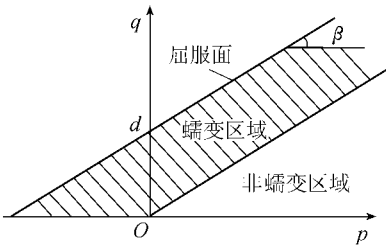


图 3 p - q 空间下土体的蠕变区域

Fig. 3 Creep regions of soils in p - q plane

过,通常砂土的蠕变率很小,忽略其蠕变效应一般是可以接受的.

土体的蠕变势函数 g_c 等于前文双曲线形式的塑性势函数 g ,蠕变应变增量 $d\varepsilon_{ij,c}$ 计算式为

$$d\varepsilon_{ij,c} = d\lambda_c \frac{\partial g_c}{\partial \sigma_{ij}} \tag{15}$$

其中标量因子 $d\lambda_c$ 可以通过等效单轴压缩条件得到^[8] :

$$d\lambda_c = \frac{d\bar{\varepsilon}_c}{\frac{\bar{\sigma}_c}{\sqrt{(\varepsilon\bar{\sigma}|_0 \tan\phi)^2 + (\bar{\sigma}_c)^2}} - \frac{1}{3} \tan\phi} \tag{16}$$

模型中一共用到 13 个模型参数(不含 ε 和 t_1),包括 $G_0, n_G, K_0, n_K, R'_f, k_1, k_2$ (无试验资料时,一般可以近似取 $n_G = n_K = 0.5$) 7 个弹性参数, β, d, ψ 3 个屈服参数, A, ξ, m 3 个蠕变参数. 这些参数均可以简单地通过常规的土工试验得到,其中 G_0, n_G, K_0, n_K, R'_f 可以通过拟合低剪应力水平、较高加载速率三轴压缩试验的应力-应变曲线得到; k_1, k_2 可以通过循环加载试验得到. 强度参数以及蠕变参数可以通过正常加载速率的三轴固结排水或不排水试验得到.

2 模型验证

为了验证统一弹塑-黏塑性本构模型的合理有效性,本文从单调加载、恒载蠕变和循环加载 3 个方面进行了试验与结果的对比分析.

2.1 单调加载情况

选取文献[12]中编号 11 的温州软黏土,分别在围压 σ_3 为 50 kPa, 140 kPa 和 200 kPa 下以三轴固结不排水试验的应力-应变曲线进行模拟. 该试验的剪切加载速率为 0.08%/min, 本文模拟的加载时长为 200 min (即最大轴向应变达到 16%). 模拟所采用的参数分别为: 弹性参数 $G_0 = 300, K_0 = 250, n_G = n_K = 0.5, R'_f = 0.95$; 屈服参数 $\beta = 17.8^\circ, d = 92.6 \text{ kPa}, \psi = 0^\circ$; 蠕变参数 $A = 4.5 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}, \xi = 0.06 \text{ kPa}^{-1}, m = 0.85, t_1 = 1 \text{ s}$ (确定弹性参数和蠕变参数时分别参考了文献[9, 13]的相关数据; 屈服强度参数系由土体三轴蠕变试验的应力-应变曲线得到; 由于在单调加载及恒载蠕变条件下,不出现卸载与反加载,因而这 2 种情况均取 $k_1 = k_2 = 1.0$).

剪切三轴试验结果与计算结果对比如图 4 所示. 总的来说,模拟效果较好. 但在围压 50 kPa 时,土体出现了明显的应变软化现象,模拟的误差较大,这是由于统一弹塑-黏塑性本构模型与传统的 Duncan-Chang 模型一样,无法模拟土体软化行为.

2.2 蠕变情况

文献[10-11]对三峡泄滩滑坡滑动带黏土 ($I_p = 20.4$) 进行了三轴固结排水蠕变试验. 本文选取围压 $\sigma_3 = 200 \text{ kPa}$ 时的试验结果进行了模拟(图 5), 相应的模型参数为: $G_0 = 400, K_0 = 300, n_G = n_K = 0.5, R'_f = 0.725$;

$\beta = 24.9^\circ, d = 98.0 \text{ kPa}, \psi = 0^\circ$ (强度参数由文中所给 2 组围压对应的屈服应力计算得到); 蠕变参数 $A = 2.8 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}, \xi = 0.0125 \text{ kPa}^{-1}, m = 0.905, t_1 = 1 \text{ s}$. 从图 5 的对比结果可以看出,统一弹塑-黏塑性本构模型模拟土体蠕变的效果是比较好的. 需要指出的是,文献[10-11]还给出了 $q = 44.8 \text{ kPa}$ 及 $q = 88.9 \text{ kPa}$ 时的蠕变曲线,本文所建模型由于假定只有 $q > p \tan\beta$ 即 $q > 109.8 \text{ kPa}$ 时土体才发生蠕变,因此无法对其进行模拟. 然而,从其试验结果可以发现,由于上述 2 种情况偏应力水平较低,土体的蠕变现象并不明显(其蠕变率相对较小,约分别只是 $q = 222.3 \text{ kPa}$ 时的 7% 和 14%),所以,本文模型将其近似处理为不发生蠕变是可以接受的.

2.3 循环加载情况

孙益振等^[14]对中密筛析 ISO 标准砂(干砂, $D_r = 0.62, \varphi$ 约为

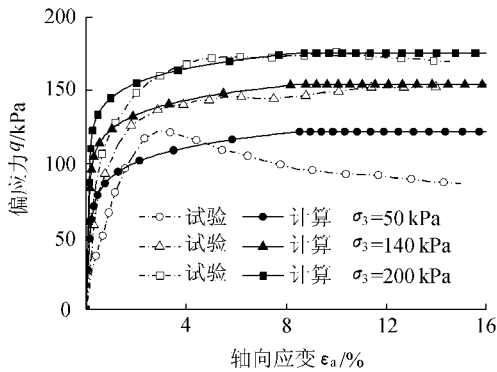


图 4 三轴剪切试验与计算结果对比

Fig. 4 Simulation of triaxial shear tests

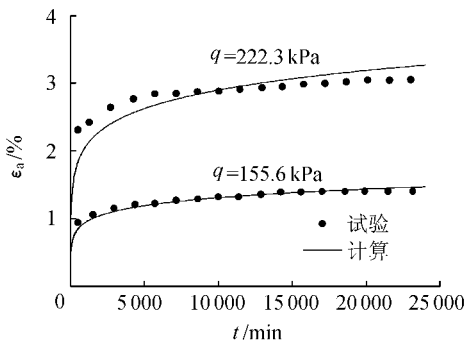


图 5 三轴蠕变试验与计算结果对比

Fig. 5 Simulation of triaxial creep tests

37°)进行了三轴循环加载试验(围压 200 kPa). 本文对其进行了模拟,采用的模型参数为 : $G_0 = 1\,250$, $K_0 = 1\,100$, $n_G = n_K = 0.5$, $R'_f = 1.17$, $k_1 = 1.8$, $k_2 = 1.35$; $\beta = 56.4^\circ$, $d = 0$ kPa, $\psi = 0^\circ$. 计算与试验结果的对比如图 6 所示. 从图 6 可以看出,在小应变($< 0.1\%$)时,偏差相对较大,这也可能与小应变下试验数据的采集精度不高有一定关系,从总体上讲,统一弹塑-黏塑性本构模型的模拟效果较好.

3 结论及建议

本文建立的统一弹塑-黏塑性本构模型参数物理概念明确,而且都可以简单地通过三轴试验得到,应用十分方便. 该模型的不足之处是:(a)与传统的 Duncan-Chang 模型一样,不能考虑土体的应变软化现象;(b)只考虑了土体的剪切蠕变,没有考虑体积蠕变,因此该模型更适用于体应力水平较低而剪切作用相对较为明显的土体(如挡土墙的填土等);(c)由于假定土体只在 $q > p \tan \beta$ 和屈服面($q = p \tan \beta + d$)之间才发生剪切蠕变,而一般计算时又忽略砂土的“黏聚力”,即取 $d = 0$,因而该模型无法考虑砂土的蠕变.

参考文献:

[1] DUNCAN J, CHANG C. Nonlinear analysis of stress and strain in soils[J]. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1970, 96(SM5): 1629-1633.

[2] KALIAKIN V N, DAFALIAS Y F. Theoretical aspects of the elastoplastic-viscoplastic bounding surface model for cohesive soils[J]. Soils and Foundations, 1990, 30(3): 11-24.

[3] 刘华北. 土工合成材料循环受载、蠕变和应力松弛特性的统一本构模拟[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(7): 823-828.

[4] 陈学良, 金星, 陶夏新, 等. 土体动力一维非线性本构关系剖析与评价[J]. 地震工程与工程震动, 2006, 26(6): 147-157.

[5] 庄海洋, 陈国兴, 梁艳仙, 等. 土体动非线性黏弹性模型及其 ABAQUS 软件的实现[J]. 岩土力学, 2007, 28(3): 436-442.

[6] HUO H B, BOBET A. Seismic design of cut and cover rectangular tunnels: evaluation of observed behavior of Dakai station during Kobe earthquake, 1995[C]//Proceedings of 1st World Forum of Chinese Scholars in Geotechnical Engineering. Shanghai: [s. n.], 2003: 456-466.

[7] HARDIN B O, DRNEVICH V P. Shear modulus and damping in soils design equations and curves[J]. Journal of Soil Mechanics and Foundation, ASCE, 1972, 98(7): 667-692.

[8] ABAQUS Inc. Abaqus theory manual and analysis user's manual, version 6.5[K]. Providence, RI: ABAQUS Inc, 2004.

[9] 朱鸿鹄, 陈晓平, 程小俊, 等. 考虑排水条件的软土蠕变特性及模型研究[J]. 岩土力学, 2006, 27(5): 694-698.

[10] 王琛, 胡德金, 刘浩吾, 等. 三峡泄滩滑坡体滑动带土的蠕变试验研究[J]. 岩土力学, 2003, 24(6): 1007-1010.

[11] 王琛, 张永丽, 刘浩吾. 三峡泄滩滑坡滑动带土的改进 Singh-Mitchell 蠕变方程[J]. 岩土力学, 2005, 26(3): 415-418.

[12] 赵志远. 考虑土体结构性的修正邓肯-张模型[D]. 杭州: 浙江大学, 2003.

[13] 庄海洋. 土-地下结构非线性动力相互作用及其大型振动台试验研究[D]. 南京: 南京工业大学, 2006.

[14] 孙益振, 邵龙潭. 三轴循环加卸载条件下砂性土变形特性研究[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(11): 1353-1357.

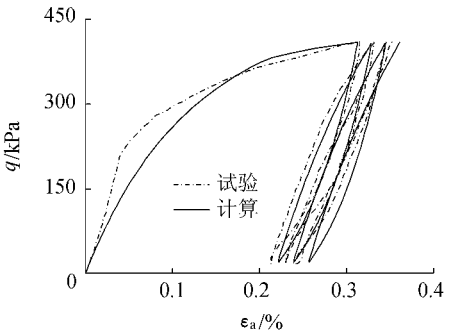


图 6 三轴循环加载试验与计算结果对比
Fig. 6 Simulation of cyclic triaxial tests

A practical and unified elastoplastic-viscoplastic model of soils

WANG Xiang-yu¹, LIU Hua-bei², SONG Er-xiang¹

(1. Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China ;
2. Department of Civil Engineering, City University of New York, New York 10031, USA)

Abstract: Most existing constitutive models either cannot fully describe the mechanical properties of soils due to their simplicity, or cannot be applied easily due to their complexity and the difficulty of calibrating too many parameters. Based on the theories of nonlinear elasticity, elastoplasticity, modified Masing rules and the Singh-Mitchell creep model as well as the generalized Masing rules for 3D application, a simple, practical and unified elastoplastic-viscoplastic model considering the nonlinearity, cyclic hysteresis and creep behavior of soils is proposed. It has been validated through the tests. The present model is simple and convenient because the parameters have clear physical meanings and are easy to calibrate.

Key words: constitutive model; elastoplastic-viscoplasticity; creep; cyclic hysteresis; Masing rule