

DOI: 10.3876/j.issn.1000-1980.2009.02.016

双曲型曲线模型在路基沉降预测中的应用

何良德¹, 姜 晔²

(1. 河海大学交通学院、海洋学院, 江苏 南京 210098; 2. 江苏省交通规划设计院, 江苏 南京 210005)

摘要: 对沉降速率与剩余沉降关系进行了研究, 结果显示, 双曲线模型反映了两者的二次非线性关系, 指数曲线模型反映了两者的线性关系。2 种模型剩余沉降的预测比值在 1~2 之间。提出了一种反映沉降速率与剩余沉降半立方(1.5 次)非线性关系的双曲型曲线预测模型, 给出了新模型参数的估算公式, 证明了新模型预测的剩余沉降是指数曲线模型的 1~1.5 倍、双曲线模型的 0.75~1 倍。实例推算结果表明, 双曲型曲线预测模型的推算值处于 2 种常用模型的推算值之间, 且接近它们的平均值, 预测结果的可靠度更高。

关键词: 路基; 最终沉降量; 双曲型曲线模型; 增量衰减率; 半立方关系

中图分类号: TU433 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1980(2009)02-0200-06

由于地质勘察、室内试验、土工计算方法存在误差, 以及实际的地基处理和路基施工进度总是与设计的预期安排有所不同, 现场发生的沉降量及其过程与初始设计往往存在很大的差异。因此, 需要通过分析现场实测沉降资料来预测后期沉降, 必要时校核、修改、补充设计, 在施工过程中对路基沉降变形进行动态设计和施工控制^[1]。

目前, 基于路基实测资料的沉降预测方法, 按照预测机理可分为地基参数法和数学分析法两大类, 按照预测的适用性可分为本级预测和越级预测两大类。

a. 地基参数法是根据土体固结理论和本构关系建立正演模型, 利用单级或多级荷载作用下实测沉降资料和优化方法, 反演分析出地基土参数, 由此进行本级或越级荷载下沉降预测。有学者分别对基于一维非线性固结模型、黏弹塑性模型以及二维和三维固结理论的多种预测模型进行了研究。这些模型虽然能较好地符合实际情况, 但普遍需要计算大量的地基参数, 反演计算量大, 且不一定有唯一值, 在实际工程中应用不方便。为了简化计算, 工程实践中仍较多采用基于太沙基一维固结理论的预测方法, 如 Asaoka 法、固结度指数法、黄广军^[2]的沉降差法等。

b. 数学分析法所建立的模型大多没有明确的力学意义, 通常用数学方法处理恒载期内的实测沉降数据, 分析沉降时变规律, 从而进行本级沉降预测。这类方法主要包括基于回归分析的曲线拟合法^[3]、基于系统分析和控制理论的灰色模型^[4]、神经网络法^[5]以及优性组合预测法^[6]等。李国维等^[7]根据施工期路堤填土厚度、实测沉降数据建立了一种新的双曲线沉降预测模型, 从土力学角度分析了预测模型的物理意义, 将工后沉降的计算值与实测值进行了比较分析, 验证了该方法的可行性。

上述各沉降预测方法有其各自的适用性, 也都存在着一定的不足。除双曲线法以外, 大多数预测模型都用指数函数来反映地基沉降的增长规律。曹国强等^[8]的研究表明, GM(1,1)灰色模型、Asaoka 法、指数法以及 Voigt-Kelvin 黏弹性模型都能反映沉降速率与沉降的线性关系。

本文研究了双曲线模型的沉降速率与沉降的二次非线性特性, 同时考虑到指数曲线模型的一次线性关系, 分析了常用模型预测沉降值偏小或偏大的原因, 提出了一种反映沉降速率与沉降半立方非线性关系的双曲型曲线预测模型。新模型预测的最终沉降量通常介于指数法和双曲线法推算值之间。

1 双曲线法与指数法的比较

基于曲线拟合法的沉降预测方法都以式(1)为基础^[9]:

$$s_t - s_d = (s_\infty - s_d)f(t - t_d) \tag{1}$$

式中： s_t —— t 时刻的沉降量； s_d —— t_d 时刻的初始沉降量； s_∞ ——最终沉降量； $t - t_d$ ——相对时间； $s_t - s_d$ —— t_d 时刻之后沉降增量； $s_\infty - s_d$ —— t_d 时刻之后最终沉降增量； $f(t - t_d)$ ——待定函数式。在路基沉降预测中， $s_\infty - s_t$ 常称为 t 时刻剩余沉降，或后期沉降。如 t_d 取为完工时刻， $s_t - s_d$ 称为工后沉降量， $s_\infty - s_d$ 称为最终工后沉降量。如果把 s_t 整理成相对 t_d 时刻的沉降增量资料，则 $t - t_d$ 可简写为 t ，此时 s_d 并不是真正的初始沉降，但设置该参数有助于提高拟合预测的精度。

从 $f(t)$ 的函数形式可知，现常用的预测沉降方法有指数法、双曲线法等。

$$f(t) = 1 - e^{-at} \tag{2}$$

$$f(t) = \frac{bt}{bt + 1} \tag{3}$$

式中 a, b 是反映土体主固结、次固结性质的参数，可反映地基沉降的时变特性。

1.1 指数曲线模型

式 (1) 及式 (2) 所示的指数曲线模型，可表示为剩余沉降 $s_{e,\infty} - s_{e,t}$ 的形式

$$s_{e,\infty} - s_{e,t} = (s_{e,\infty} - s_{e,d})e^{-at}$$

或
$$\ln(s_{e,\infty} - s_{e,t}) = \ln(s_{e,\infty} - s_{e,d}) - at \tag{4}$$

式中下标 e 表示指数曲线模型。

将式 (4) 对时间微分，可得沉降速率为

$$\frac{ds_{e,t}}{dt} = (s_{e,\infty} - s_{e,d})ae^{-at} \tag{5}$$

再将式 (4) 代入式 (5) 得

$$\frac{ds_{e,t}}{dt} = a(s_{e,\infty} - s_{e,t}) \tag{6}$$

式 (6) 表明，指数曲线模型反映的沉降速率与剩余沉降呈线性关系。

设有 3 点等时差 Δt 的沉降观测资料，相应沉降增量为 $\Delta s_1, \Delta s_2$ 。记

$$k_1 = \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} \tag{7}$$

根据沉降增量 $\Delta s_1, \Delta s_2$ ，可由式 (4) 推得指数曲线模型的参数为

$$s_{e,\infty} - s_{e,d} = \frac{1}{1 - k_1} \Delta s_1 \quad a = -\frac{\ln k_1}{\Delta t} \tag{8}$$

将推得的参数代回式 (4)，得第 i 个等差时间后的剩余沉降

$$s_{e,\infty} - s_{e,i} = \frac{1}{1 - k_1} \Delta s_1 k_1^i \tag{9}$$

进而可得

$$\Delta s_{e,i} = \Delta s_1 k_1^{i-1} = \Delta s_{e,i-1} k_1 \quad k_e = k_{e,i} = k_1 \tag{10}$$

式 (10) 表明指数曲线模型的沉降增量呈指数衰减，沉降增量系列构成的是衰减率等于 k_e 的等比数列。

式 (10) 还可表示为

$$s_{e,i+1} - s_{e,i} = k_e(s_{e,i} - s_{e,i-1}) \tag{11}$$

由此可以看出，在 (s_{i-1}, s_i) 坐标系内点绘等时差系列的沉降量资料时，可得斜率为 k_e 的直线，这也是 Asaoka 法推求最终沉降的理论基础。

1.2 双曲线模型

式 (1) 及式 (3) 所示的双曲线模型，可表示为剩余沉降 $s_{h,\infty} - s_{h,t}$ 的形式

$$s_{h,\infty} - s_{h,t} = (s_{h,\infty} - s_{h,d}) \frac{1}{bt + 1} \tag{12}$$

式中下标 h 表示双曲线模型。

将式 (12) 对时间微分，可得沉降速率为

$$\frac{ds_{h,t}}{dt} = (s_{h,\infty} - s_{h,d}) \frac{b}{(bt + 1)^2} \quad (13)$$

再将式(12)代入式(13)得

$$\frac{ds_{h,t}}{dt} = \frac{b}{s_{h,\infty} - s_{h,d}} (s_{h,\infty} - s_{h,t})^2 \quad (14)$$

式(14)表明,双曲线模型反映的沉降速率与剩余沉降呈二次非线性关系。

根据3点等时差 Δt 的沉降增量 $\Delta s_1, \Delta s_2$,可由式(12)推得双曲线模型的参数为

$$s_{h,\infty} - s_{h,d} = \frac{1 + k_1}{1 - k_1} \Delta s_1 \quad b = \frac{1 - k_1}{2k_1 \Delta t} \quad (15)$$

将求得的参数代回式(12),可得第*i*个等差时间后的剩余沉降

$$s_{h,\infty} - s_{h,i} = \frac{1 + k_1}{1 - k_1} \Delta s_1 \frac{2k_1}{(1 - k_1)i + 2k_1} \quad (16)$$

进而可推得沉降增量的迭代式为

$$\Delta s_{h,i} = k_{h,i} \Delta s_{h,i-1} \quad k_{h,i} = k_1 + \frac{(1 - k_1)(i - 2)}{(1 - k_1)i + 2k_1} \quad (k_1 \leq k_{h,i} \rightarrow 1) \quad (17)$$

式(17)表明,双曲线模型的沉降增量呈衰减趋势,但衰减率 $k_{h,i}$ 不是恒定值,由 k_1 开始逐渐增大,直至趋近于1。换言之,双曲线模型所描述的沉降增量是衰减越来越缓慢的数列。

比较式(8)式(15)可知

$$1 \leq \frac{s_{h,\infty} - s_{h,d}}{s_{e,\infty} - s_{h,d}} = 1 + k_1 \leq 2 \quad (18)$$

说明双曲线模型预测值 $s_{h,\infty}$ 是指数曲线模型预测值 $s_{e,\infty}$ 的 $1 + k_1$ 倍。因此,如果地基的排水固结越慢,或者观测时间 T 越短,则 k_1 越大,2种模型预测值的差异就越大,两者比值在1~2之间变化。

2 一种双曲型曲线预测模型

2.1 新模型的提出

现将指数曲线模型、双曲线模型的沉降速率与剩余沉降关系式综合表示为

$$v_t = \frac{ds_t}{dt} = c(s_{\infty} - s_t) \left(\frac{s_{\infty} - s_t}{s_{\infty} - s_d} \right)^n \quad (19)$$

$n = 0$ 时式(19)为指数曲线模型, $n = 1$ 时该式为双曲线模型。 c 为待定系数,反映地基沉降的时变特性。

大量工程实践表明^[6,10]根据早期实测沉降数据来预测沉降时,双曲线模型计算的沉降量往往偏大。指数曲线模型以Terzaghi一维固结理论为基础,反映的是土体的主固结沉降,由于没有考虑次固结沉降等因素,其最终沉降量的预测一般都是偏小的。

对于通式(19),现讨论当 $0 < n < 1$ 时,预测的剩余沉降是否会介于指数曲线模型、双曲线模型的预测值之间。设 $n = 0.5$,式(19)变为

$$\frac{ds_{m,t}}{dt} = c(s_{m,\infty} - s_{m,t}) \sqrt{\frac{s_{m,\infty} - s_{m,t}}{s_{m,\infty} - s_{m,d}}} \quad (20)$$

式中下标 m 表示本文提出的新模型。

对式(20)进行变量分离

$$(s_{m,\infty} - s_{m,d}) \sqrt{s_{m,\infty} - s_{m,t}} \cdot \sqrt{s_{m,\infty} - s_{m,d}} ds_{m,t} = c dt \quad (21)$$

再进行积分,并根据初始条件 $s_{m,t=0} = s_{m,d}$ 得

$$\sqrt{\frac{s_{m,\infty} - s_{m,d}}{s_{m,\infty} - s_{m,t}}} = 0.5ct + 1 \quad (22)$$

则剩余沉降表达式为

$$s_{m,\infty} - s_{m,t} = (s_{m,\infty} - s_{m,d}) \frac{1}{(0.5ct + 1)^2} \quad (23)$$

整理得

$$s_{m,t} = s_{m,d} + (s_{m,\infty} - s_{m,d}) \frac{(0.5ct + 1)^2 - 1}{(0.5ct + 1)^2}$$

(24)

式(24)表示的 $s_{m,t}$ 是一条对称于 $t = -2/c$ 的双曲型曲线.

2.2 双曲型曲线模型的特点

根据 3 点等时差 Δt 的沉降增量 $\Delta s_1, \Delta s_2$,可由式(22)反演得双曲型曲线模型的参数为

$$\begin{cases} s_{m,\infty} - s_{m,d} = \frac{1 + k_1}{1 - k_1 \tan^2 \theta} \Delta s_1 \\ c = 2 \frac{\sqrt{1 + k_1} \cos \theta - \sqrt{k_1}}{\sqrt{k_1} \Delta t} \end{cases}$$

(25)

其中 $\theta = \frac{1}{3} \arccos \left(-\sqrt{\frac{k_1}{1 + k_1}} \right)$. 因为 $0 < k_1 < 1$,所以 $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

由式(8)、式(15)和式(25)比较可得

$$1 \leq \frac{s_{m,\infty} - s_{m,d}}{s_{e,\infty} - s_{e,d}} = \frac{1 - k_1^2}{1 - k_1 \tan^2 \theta} \leq \frac{3}{2} \qquad \frac{3}{4} \leq \frac{s_{m,\infty} - s_{m,d}}{s_{h,\infty} - s_{h,d}} = \frac{1 - k_1}{1 - k_1 \tan^2 \theta} \leq 1$$

(26)

由此可见 ,一般情况下 ,双曲型曲线预测模型预测的剩余沉降始终介于指数法和双曲线法预测值之间.

3 实例验证与分析

3.1 实例概况

苏嘉杭高速公路吴江段长 45 km ,区内河网、湖荡密布 ,地势低平开阔 ,软土地基分布广泛 ,约占路基总长的 92% . 软土埋深大 ,一般深度均在 20 m 以上 ,最厚达 33 m ,多为淤泥或淤泥质土 ,强度低、压缩性高、固结速度慢 . 该高速公路 2002 年 9 月路面铺筑完成 ,工后沉降观测一直延续至 2005 年 6 月结束 ,历时约 980 d . 现选取工后实测沉降量大于 150 mm ,且点距大于 200 m 的 12 个测点的观测数据^[1]进行拟合与预测 ,主要结果如表 1 所示 .

反演待定参数为 a (或 b, c) , s_d, s_∞ 时 ,采用最优化方法中的复合形法 ,求出使式(27)的目标函数 J (平均离差)最小时的参数值 :

$$J = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |(s(t_i) - \hat{s}(t_i))|$$

(27)

式中 $s(t_i), \hat{s}(t_i)$ ——沉降的计算值和实测值 ; m ——工后观测次数 .

表 1 3 种模型复合形法优化反演预测结果比较

Table 1 Comparison of predicted post-construction settlements with complex shape methods for 3 kinds of models																
观测 桩号	观测 次数	观测 历时/d	实测工后 沉降量/ mm	k_1	预测最终工后沉降量/mm					沉降时变参数/d ⁻¹			拟合平均离差/mm			
					指数法 s_e	双曲 线法 s_h	本文 方法 s_m	$s_h/$ s_e	$s_m/$ s_e	指数 法 a	双曲 线法 B	本文 方法 c	指数法 J_e	双曲 线法 J_h	本文 方法 J_m	
k64 + 577	28	949	156.5	0.41	188.5	271.0	228.4	1.44	1.21	0.00187	0.00146	0.00166	1.7	1.6	1.6	
k80 + 850	30	989	160.5	0.50	218.0	334.2	275.5	1.53	1.26	0.00132	0.00092	0.00108	1.7	1.9	1.8	
k81 + 067	32	974	251.0	0.71	512.9	892.2	702.1	1.74	1.37	0.00069	0.00040	0.00051	1.1	1.2	1.2	
k83 + 560	29	953	226.0	0.56	322.7	529.8	422.4	1.64	1.31	0.00129	0.00081	0.00101	3.5	3.9	3.8	
k83 + 870	29	953	148.0	0.54	213.0	339.4	276.1	1.59	1.30	0.00122	0.00079	0.00096	2.9	3.0	3.0	
k86 + 520	31	975	241.0	0.58	359.6	584.0	471.0	1.62	1.31	0.00108	0.00069	0.00085	2.0	1.8	1.9	
k88 + 580	30	974	195.0	0.55	284.2	460.7	371.2	1.62	1.31	0.00123	0.00079	0.00097	1.6	1.9	1.8	
k90 + 750	31	1016	182.4	0.49	237.2	365.6	299.7	1.54	1.26	0.00143	0.00100	0.00119	0.1	0.6	0.4	
k91 + 026	31	1016	188.0	0.58	292.1	477.9	384.3	1.64	1.32	0.00104	0.00065	0.00080	2.5	2.7	2.6	
k91 + 330	31	1016	257.0	0.47	334.7	511.1	421.7	1.53	1.26	0.00146	0.00102	0.00120	2.6	2.7	2.7	
k91 + 666	31	977	154.5	0.70	299.8	522.4	410.6	1.74	1.37	0.00075	0.00044	0.00056	1.8	1.9	1.9	
k97 + 740	28	951	153.0	0.64	271.2	449.4	359.8	1.66	1.33	0.00087	0.00054	0.00067	1.9	1.8	1.8	

由表 1 可以看出 ,12 个测点的观测历时 $T = 949 \sim 1\,016\text{ d}$,观测总次数 $m = 28 \sim 31$ 次 . 内插估计对应于观测历时中点 $T/2$ 的沉降量 ,求得后半时段与前半时段沉降增量之比 $k_1 = \Delta s_2/\Delta s_1 = 0.41 \sim 0.71$.

用指数法、双曲线法和本文方法进行拟合的平均离差均较小,而且相当接近,无明显差别,但预测的最终工后沉降量差异较大.其中指数法预测值最小,双曲线法预测值最大,是指数法的1.44~1.74倍,平均1.61倍;本文方法的预测值居中,是指数法的1.21~1.37倍,平均1.30倍,接近指数法和双曲线法的平均值.

用式(8)、式(15)和式(25)估算了3种模型的参数,与复合形法优化求得的参数非常接近,相互验证了参数估算式、复合形优化计算程序的正确性.

3.2 典型断面分析

以k86+520为例,实测工后沉降量与拟合预测曲线如图1所示.根据反演所得 s_d, s_∞ ,检验式(4)、式(12)、式(22)与 t 的线性相关系数,指数法、双曲线法和本文方法分别为0.9994、0.9996和0.9995,3种方法的拟合情况良好,但从图1可以看出后期预测值差异较大.

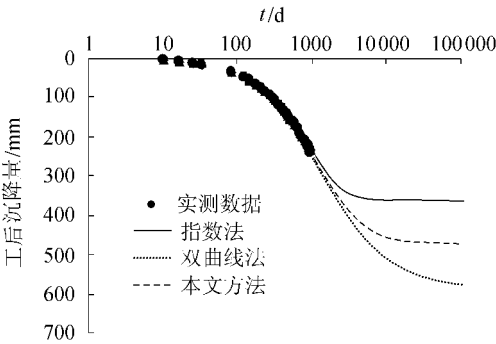


图1 k86+520 实测与预测沉降曲线比较

Fig. 1 Variation of measured and predicted settlements with time for section k86 + 520

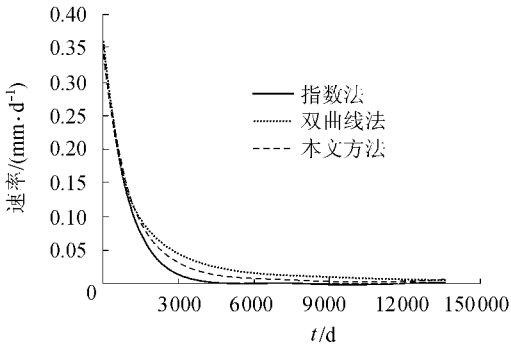


图2 k86+520 预测沉降速率随时间变化曲线

Fig. 2 Relationship between predicted settlement rate and time for section k86 + 520

拟合与预测的沉降速率随时间、沉降的变化规律如图2、图3所示.由图2、图3可以看出,3种方法均与实测沉降拟合较好,在实测时间975 d、实测沉降量241 mm以内,预测的沉降速率相当接近,预测沉降曲线与实测曲线几乎重合.指数法的沉降速率与沉降曲线呈一次线性关系,沉降增量衰减率为常量,等于0.823(见图4,沉降增量衰减率等时差180 d的沉降增量之比),因此速率下降最快,预测的工后沉降量最小;双曲线法的沉降速率与沉降呈二次非线性关系,观测初期沉降增量衰减率等于0.801,至观测末期增大为0.867,后期速率下降最缓慢,至工后6 a时速率仍有0.068 mm/d、沉降增量0.905,工后12 a时速率为0.026 mm/d、衰减率为0.939,相比指数法的速率和衰减率要大得多.

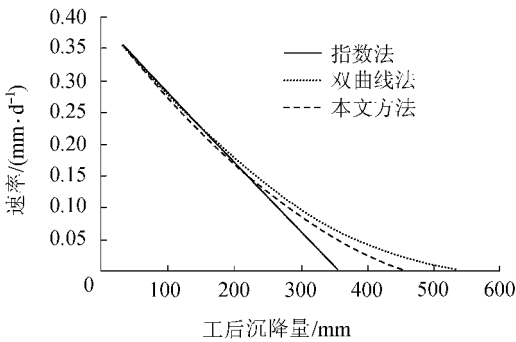


图3 k86+520 预测沉降速率随沉降变化曲线

Fig. 3 Relationship between predicted settlement rate and settlement for section k86 + 520

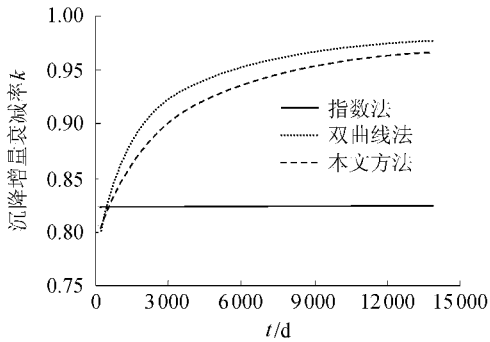


图4 k86+520 预测180 d的沉降增量衰减率k

Fig. 4 Attenuation ratio k of predicted settlement increment within a period of 180 days for section k86 + 520

本文方法的沉降速率与沉降呈半立方非线性关系,观测初期沉降增量衰减率等于0.809,至观测末期增大为0.855,后期速率下降虽然越来越缓慢,但仍比双曲线法要快,至工后6 a、12 a时预测的速率为0.060 mm/d、0.018 mm/d,沉降增量衰减率分别是0.887、0.922,所有预测参数均介于指数法、双曲线法预测值之间,这与实际工程经验相符.

4 结 语

本文提出了沉降速率与沉降呈半立方非线性关系的双曲型曲线预测模型.理论分析和实例推算结果表明,该模型的推算值通常处于指数法和双曲线法推算值之间,且接近这 2 种传统方法的平均值,预测结果的可靠度更高.

双曲型曲线预测模型有 3 个参数,反演计算的方法与指数法和双曲线法相同.参数可以根据 3 点法估算,或按最小二乘原理确定线性关系式(22)相关系数最大时的参数 $s_{\infty, \mu}, s_{d, \mu}, c$,也可按确定的目标函数,采用优化反演方法求得参数.

参考文献：

[1] JTG D30—2004,公路路基设计规范[S].
[2] 黄广军.分级加载条件下提早预测地基沉降的沉降差法[J].岩土工程学报,2007,29(6):811-818.
[3] 许永明,徐泽中.一种预测路基工后沉降量的方法[J].河海大学学报:自然科学版,2000,28(5):111-113.
[4] 雷学文,白世伟,孟庆山.灰色预测在预测软土地基沉降分析中的应用[J].岩土力学,2000,21(2):145-147.
[5] 张留俊,黄晓明,冯炜,等.人工神经网络在路堤沉降预测中的应用[J].公路交通科技,2006,23(5):7-10.
[6] 李涛,张仪萍,张士乔.软土路基沉降的优性组合预测[J].岩石力学与工程学报,2005,24(18):3282-3286.
[7] 李国维,盛维高,蒋华忠,等.软土地基路堤预抛高确定方法[J].河海大学学报:自然科学版,2008,36(1):76-81.
[8] 曹国强,张仪萍,张士乔,等.地基沉降速率与沉降的关系及其应用[J].岩土力学,2003,24(3):467-470.
[9] 王志亮,郑明新,吴勇,等.增加曲线模型在路基沉降预测中的应用研究[J].岩土力学,2004,25(6):901-903.
[10] 孙更生,郑大同.软土地基与地下工程[M].北京:中国建筑工业出版社,1984.
[11] 辜清华,何良德.预测路基沉降的一种新模型[J].石家庄铁道学院学报,2006,19(2):64-67.

Application of hyperbolic curves to prediction of embankment settlements

HE Liang-de¹, JIANG Ye²

(1. College of Traffic ,College of Ocean , Hohai University , Nanjing 210098 , China ;
2. Jiangsu Provincial Planning & Design Institute for Communications , Nanjing 210005 , China)

Abstract : The relationship between settlement rate and residual settlement was studied. The results indicate that the relationship is quadratic non-linear for the hyperbolic curve method and linear for the exponential curve method , and the ratio of predicted residual settlements between the two kinds of models is 1 – 2. A hyperbolic curve model with a half-cube non-linear relationship between the settlement rate and the residual settlement is proposed. The corresponding formula for parametric estimation is also put forward. It has been proved that the predicted residual settlement determined by the proposed model is 1 – 1.5 times that of the exponential curve model , and 0.75 – 1 times that of the hyperbolic curve model. Engineering cases show that the results estimated by the present model are between those of the two kinds of models and are close to their average , and the reliability of the former is higher than that of the latter two models.

Key words : embankment ; final settlement ; hyperbolic type curve model ; attenuation ratio of increment ; half-cube relationship