

预条件共轭梯度法在拱坝有限元重分析中的应用

孙林松¹, 郭兴文², 李春和¹

(1. 扬州大学水利科学与工程学院, 江苏 扬州 225009; 2. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要:以初始设计的劲度矩阵为预条件矩阵, 给出了大型结构有限元重分析的预条件共轭梯度算法. 该算法不需要形成和存储修改结构的劲度矩阵, 占用内存小, 并具有较高的精度和收敛速度. 拱坝坝形修改有限元分析算例表明, 即使设计变量有较大改变时, 该方法也能较快地收敛到精确解.

关键词:预条件共轭梯度法 有限元重分析 拱坝

中图分类号: TV642.45

文献标识码: A

文章编号: 1000-1980(2009)02-0236-04

结构优化设计中, 对设计变量修改后的结构进行重分析是必不可少的. 对于拱坝等大型结构系统, 若每次修改后都直接求解新的有限元控制方程, 计算量非常庞大, 很不经济^[1], 为此, 通常采用一些近似重分析方法计算结构修改后各类响应的近似值. 常用的近似重分析方法有摄动法、等效荷载法等. 摄动法采用 Taylor 展开式计算新设计点结构响应的近似值, 如 Schmit 的应力展开法^[2]、朱伯芳的内力展开法^[3-4]等都属于此类方法. 该方法一般只在设计变量发生小的改变时才能得到较好的近似解, 而且必须计算位移灵敏度. 对于设计变量较多的大型结构系统, 位移灵敏度计算的工作量较大. 等效荷载法^[5]假设结构修改时外荷载不变, 将结构刚度的改变量与位移的乘积看成等效荷载, 通过迭代计算求结构修改后位移的近似值. 该方法对桁架类结构较适用, 而对实体结构如拱坝等, 外荷载不变的假设导致计算误差较大.

其他结构重分析方法还有响应面法^[6]、缩减基法^[7-8]、组合逼近法^[9-10]等. 响应面法用一个简单的函数(如多项式)来代替响应函数, 再用一些设计点的计算值来拟合该函数. 响应面法一般只适用于设计变量较少的问题. 缩减基法是用一些基向量的线性组合来逼近多自由度系统的响应, 将问题化为求解基向量的系数. 但基向量的计算涉及很多计算量, 对于大型结构系统问题而言计算成本将大大增加. 组合逼近法将缩减基法与一个级数展开的前几项组合起来, 计算是基于一个给定点的精确分析结果, 每次重分析涉及求解一个小规模方程组. 但组合逼近法要求引进增量刚度矩阵, 计算缩减刚度矩阵, 存储所有基向量, 这些操作将显著地增加计算成本.

本文以初始设计的劲度矩阵为预条件矩阵, 采用预条件共轭梯度(preconditioned conjugate gradient, PCG)算法进行修改结构的重分析. 该方法计算量小, 实施方便, 即使设计变量发生较大变化也能较快地获得高精度近似结果.

1 计算方法

设初始设计的劲度矩阵为 K_0 , 在初始分析时已写成如下 Cholesky 分解式:

$$K_0 = L_0 L_0^T \quad (1)$$

式中 L_0 为下三角矩阵.

假设修改设计后结构的劲度矩阵为 K , 荷载向量为 R , 则相应的有限元控制方程为

$$Ku = R \quad (2)$$

式中 u 为修改设计的结构位移向量.

结构重分析的目的就是要确定修改设计的结构位移向量 u , 同时又避免直接求解式(2), 为此将式(2)写成如下等价式

$$L_0^{-1} K L_0^{-T} L_0^T u = L_0^{-1} R \quad (3)$$

即

其中

$$\begin{aligned}\widetilde{K}u &= \widetilde{R} \\ \widetilde{K} &= L_0^{-1}KL_0^{-T} \quad \widetilde{u} = L_0^T u \quad \widetilde{R} = L_0^{-1}R\end{aligned}\tag{4}$$

利用共轭梯度算法^[11]求解方程(4),具体迭代公式为

$$\left\{\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{\widetilde{r}_{k-1}^T \widetilde{r}_{k-1}}{\widetilde{p}_k^T \widetilde{K} \widetilde{p}_k} \\ \widetilde{u}_k &= \widetilde{u}_{k-1} + \alpha_k \widetilde{p}_k \\ \widetilde{r}_k &= \widetilde{r}_{k-1} - \alpha_k \widetilde{K} \widetilde{p}_k \\ \beta_k &= \frac{\widetilde{r}_k^T \widetilde{r}_k}{\widetilde{r}_{k-1}^T \widetilde{r}_{k-1}} \\ \widetilde{p}_{k+1} &= \widetilde{r}_k + \beta_k \widetilde{p}_k\end{aligned}\right. \quad (k=1,2,\cdots)\tag{5}$$

其中

$$\widetilde{r}_0 = \widetilde{R} - \widetilde{K} \widetilde{u}_0 \quad \widetilde{p}_1 = \widetilde{r}_0$$

式中 $\widetilde{u}_0$ 为任取的初值.

按式(5)直接迭代,需计算 $\widetilde{K} = L_0^{-1}KL_0^{-T}$ 和 $\widetilde{R} = L_0^{-1}R$,而且还需将迭代得到的近似解 $\widetilde{u}_k$ 通过变换 $u_k = L_0^{-T}\widetilde{u}_k$ 变成方程组(2)的近似解.而本文只需作变换

$$u_k = L_0^{-T} \widetilde{u}_k \quad r_k = L_0 \widetilde{r}_k \quad p_k = L_0^{-T} \widetilde{p}_k\tag{6}$$

代入式(5),即可得如下算法:

- 步 1 计算 $r_0 = R - Ku_0, z_0 = K_0^{-1}r_0, \rho_0 = r_0^T z_0$,置 $k = 1$,令 $p_1 = z_0$.
- 步 2 计算 $w = Kp_k, \alpha_k = \rho_{k-1}/(p_k^T w), u_k = u_{k-1} + \alpha_k p_k, r_k = r_{k-1} - \alpha_k w$.
- 步 3 收敛判断.若 $\|r_k\| < \epsilon$,则输出 u_k ,结束,否则转下一步.
- 步 4 计算 $z_k = K_0^{-1}r_k, \rho_k = r_k^T z_k, \beta_k = \rho_k/\rho_{k-1}, p_{k+1} = z_k + \beta_k p_k$,令 $k = k + 1$,转步 2.

上述算法即为 PCG 算法. K_0 称为预条件矩阵; u_0 为任意初值,这里可取 $u_0 = K_0^{-1}R$; w 的计算可按单元进行然后再组装,即在该算法中无需形成结构修改后的整体劲度矩阵; z_k 可利用初始设计,分析已完成 K_0 矩阵的 Cholesky 分解式(1),通过前代、回代计算而得.

设有限元模型整体劲度矩阵 K 为 $n \times n$ 阶矩阵,半带宽为 b .用 PCG 算法迭代 k 次所需的浮点运算次数为 $N_{\text{FP}} = (8bn + 16n)k$,而采用 Cholesky 分解法直接求解方程所需的浮点运算次数为 $N_{\text{FC}} = (b^2 + 7b + 2)n$,此外还需要 n 个求平方根运算.实际工程中 b 一般很大,有 $b^2 \gg b$,因此,2 种算法浮点运算次数的比为

$$C = \frac{N_{\text{FP}}}{N_{\text{FC}}} = \frac{(8b + 16)k}{b^2 + 7b + 2} \approx \frac{8k}{b}\tag{7}$$

式(7)表明,PCG 算法迭代 $\frac{b}{8}$ 次的运算量与 Cholesky 分解法的运算量相当.

2 工程算例

某抛物线形混凝土双曲拱坝,坝顶高程 827.00m,坝底高程 550m,最大坝高 277.0m,正常蓄水位 820.0m.初始设计和修改设计的拱坝体形参数如表 1 和表 2 所示.由表 1 和表 2 可以看出 2 个拱坝体形有较大的差别.

表 1 初始设计体形参数

Table 1 Initial design parameters of the dam

高程/m	拱冠梁参数/m		拱端厚度/m		半中心角/(°)		拱轴线拱冠曲率半径/m	
	上游面坐标	厚度	左岸	右岸	左岸	右岸	左岸	右岸
827.00	0.000	14.000	19.035	19.000	46.891	45.073	341.617	261.046
780.00	-19.582	30.820	30.650	39.679	47.325	45.620	301.730	241.896
740.00	-32.563	41.510	42.822	55.000	47.876	46.746	268.473	223.934
690.00	-43.508	51.368	58.165	69.945	48.174	47.959	229.704	201.973
640.00	-48.000	58.677	70.442	78.787	46.396	47.060	200.492	185.014
600.00	-46.524	63.655	75.744	80.437	43.000	43.600	176.757	171.928
570.00	-42.250	67.365	75.929	77.997	37.000	37.000	163.024	163.842
550.00	-37.816	70.000	73.834	74.435	18.500	18.500	154.557	154.836

表 2 修改设计体形参数
Table 2 Modified design parameters of the dam

高程/m	拱冠梁参数/m		拱端厚度/m		半中心角/(°)		拱轴线拱冠曲率半径/m	
	上游面坐标	厚度	左岸	右岸	左岸	右岸	左岸	右岸
827.00	0.000	12.545	17.176	16.193	49.574	46.597	310.852	247.509
780.00	-22.551	32.229	33.583	36.833	47.568	42.419	299.140	270.484
740.00	-38.150	44.441	47.198	52.577	49.248	44.088	255.795	245.693
690.00	-52.194	55.033	59.688	59.681	47.967	44.982	232.377	224.580
640.00	-59.259	61.796	68.739	70.630	45.120	44.561	209.503	202.018
600.00	-59.224	65.430	72.842	79.279	40.497	41.558	192.881	184.097
570.00	-55.550	67.610	75.906	76.233	33.323	33.624	186.586	185.443
550.00	-51.245	68.979	74.936	72.304	15.301	17.295	188.708	166.126

有限元模型中结点总数为 3 625,单元总数为 2 738,自由度数目 $n = 9\,594$,整体劲度矩阵的半带宽 $b = 1\,948$.以初始设计的整体劲度矩阵为预条件矩阵 K_0 ,采用 PCG 算法对修改设计进行结构重分析,计算工况荷载组合为“正常蓄水位 + 自重 + 温降”,坝体主要应力结果见表 3.表中 PCG-3 和 PCG-7 分别表示 PCG 算法迭代 3 次和 7 次的结果,并以采用 Cholesky 分解法直接求解的结果为精确解.

从表 3 可以看出,经过 3 次迭代得到的坝体主要应力已经是精确解的很好近似值,7 次迭代就已经基本收敛到了精确解.表 4 给出了最大主应力和最大顺河向位移的迭代过程.

表 3 坝体主要应力极值
Table 3 Stress extremes of the dam

方法	上游面应力/MPa				下游面应力/MPa				拱冠梁剖面应力/MPa			
	σ_{ymax}	σ_{ymin}	σ_{1max}	σ_{3min}	σ_{ymax}	σ_{ymin}	σ_{1max}	σ_{3min}	σ_{ymax}	σ_{ymin}	σ_{1max}	σ_{3min}
PCG-3	2.883 9	-3.030 6	5.303 4	-6.407 3	-0.592 1	-10.902 1	0.323 8	-15.129 0	2.532 2	-10.902 1	5.304 3	-15.129 0
PCG-7	2.889 2	-3.011 1	5.308 6	-6.434 7	-0.597 4	-10.878 7	0.314 4	-15.105 4	2.542 3	-10.878 7	5.308 6	-15.105 4
精确解	2.889 8	-3.011 4	5.309 6	-6.434 4	-0.596 5	-10.880 3	0.315 6	-15.107 1	2.543 1	-10.880 3	5.309 6	-15.107 1

表 4 最大主应力及最大顺河向位移迭代过程

Table 4 Iteration process of the maximum principal stress and the largest displacement along river

迭代次数	σ_{1max}/MPa	σ_{3min}/MPa	σ_{umax}/cm	迭代次数	σ_{1max}/MPa	σ_{3min}/MPa	σ_{umax}/cm
0	4.762 8	-13.942 2	10.461 7	4	5.322 5	-15.124 6	11.919 1
1	5.003 7	-14.741 5	11.181 4	5	5.316 6	-15.111 8	11.926 3
2	5.186 8	-15.067 3	11.591 9	6	5.310 0	-15.105 7	11.918 7
3	5.304 3	-15.129 0	11.853 6	7	5.308 6	-15.105 4	11.916 1

3 结 论

- a. 预条件共轭梯度算法用于结构重分析计算量小,实施方便,不需要形成和存储修改结构的劲度矩阵,占用内存小.
- b. 以初始设计的劲度矩阵为预条件矩阵,用预条件共轭梯度算法进行结构重分析具有较高的精度和收敛速度,即使设计变量有较大改变时也能很快收敛到精确解.

参考文献:

[1] 孙林松,王德信,裴开国.以应力为目标的拱坝体形优化设计[J].河海大学学报:自然科学版,2000,28(1):57-60.
[2] SCHMIT L A, MIURA H. An advanced structural analysis[C]//Proceedings of AIAA/ASME/SAE 17th Structures, Structural Dynamics and Material Conference. Valley Forge, Pennsylvania, 1976:432-447.
[3] 朱伯芳,黎展眉.双曲拱坝的优化[J].水利学报,1981(2):11-21.
[4] ZHU Bo-fang. Internal force expansion method for stress reanalysis in structural optimization[J]. Communications in Applied Numerical Methods, 1991, 7: 295-298.
[5] 程耿东.工程结构优化设计基础[M].北京:水利电力出版社,1984:277-278.
[6] UNAL R, LEPSCH R, ENGELUND W, et al. Approximation model building and multidisciplinary design optimization using response

surface methods[C]//Proc 6th AIAA/NASA/ISSMO Symp : On Multidisciplinary Analysis and Optimization. Bellevue WA,1996.

[7] KIRSCH U.Reduced basis approximations of structural displacements for optimal design[J] .AIAA J,1991,29 :1751-1758.

[8] NOOR A K.Recent advances and applications of reduction methods[J] .Appl Mech Rev,1994,47 :125-146.

[9] KIRSCH U.Efficient reanalysis for topological optimization[J] .Structural Optimization,1993,6 :143-150.

[10] KIRSCH U. A unified reanalysis approach for structural analysis, design and optimization [J] . Structural and Multidisciplinary Optimization,2003,25 :67-85.

[11] 徐树芳.矩阵计算的理论与方法[M] .北京 北京大学出版社,1995 :162-164.

Application of preconditioned conjugate gradient method to finite element reanalysis of arch dams

SUN Lin-song¹, GUO Xing-wen², LI Chun-he¹

(1. College of Hydraulic Science & Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China ;
2. College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract : The initial design stiffness matrix was regarded as the precondition matrix. The preconditioned conjugate gradient (PCG) method was proposed for the finite element reanalysis of large structural optimization. This algorithm is not necessary to form and store the stiffness matrix of modified structures. It can save memory and has a high precision and convergence speed. The finite element reanalysis of an arch dam shows that the proposed method rapidly achieves excellent approximate results even with many changes of the design variables.

Key words : preconditioned conjugate gradient method ; finite element reanalysis ; arch dam

《水资源保护》征订启事

全国中文核心期刊 中国科技核心期刊

《水资源保护》是河海大学和环境水利研究会主办的科学技术期刊,创刊于 1985 年,双月刊,96 页,国内外公开发行,国内统一连续出版物号 :CN32-1356/TV.现为全国中文核心期刊、中国科技核心期刊和江苏省一级期刊.

《水资源保护》主要刊登与水资源保护有关的基础研究,应用技术,工程措施,综合述评,专题讲座,国外动态,书刊评介,科技简讯,水资源管理、评价、监测、优化配置,节水技术,水环境污染控制等方面的文章.近年来,重点关注与水有关的生态环境领域中的研究方向,新增设相关的基础研究、防治技术、城市水环境治理等内容.

主要读者对象 :全国从事与水资源保护工作有关的工程技术人员、科研人员、管理干部以及大专院校的师生.

《水资源保护》邮发代号 :28-298,双月刊,8 元/期,全年 48 元,每逢单月 30 日出版.可在全国各地邮局订阅,也可直接与编辑部联系.

编辑部地址 :210098 南京市西康路 1 号 河海大学《水资源保护》编辑部

电话 :(025)83786642

传真 :(025)83786642

E-mail :zh@hhu.edu.cn

http :://kkb.hhu.edu.cn