

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2009.03.026

连通图可迹的新充分条件

张丽丽

(河海大学计算机及信息工程学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 : 为了研究连通图的圈性结构 ,可以考虑局部性质与整体结构之间的密切关系 . 通过限定邻域并和邻域交的条件 ,证明了定理 : 如果对满足 $1 \leq |N(x) \cap N(y)| \leq \alpha - 1$ 的任意不相邻的顶点 x, y 有 $|N(x) \cup N(y)| \geq n - \delta - 1$, 则 G 是可迹的 (其中 α 表示连通图 G 的独立数) , 并根据结果给出连通图可迹的一个平凡的充分条件 , 此充分条件作为定理的推论说明定理在某种意义下是最好可能的 .

关键词 : 连通图 ; Hamilton ; 邻域并 ; 邻域交 ; 可迹

中图分类号 : O157.5 文献标识码 : A 文章编号 : 1000-1980(2009)03-0364-03

本文只讨论有限简单图 , 文中未加定义的概念和记号可见文献 [1] . 总设 G 为图 . 称 G 为 Hamilton 图 , 如果 G 中存在 Hamilton 圈 . 称 G 为可迹的 , 如果 G 中存在 Hamilton 路 . 连通图存在圈方面的结果有很多^[2-4] , 而连通图可迹的充分条件却不是很多 , 已有的结果见文献 [5-9] .

对 G 中任意顶点 v , 称 $N(v)$ 为 v 的邻域 , $d(v) = |N(v)|$. 如果 A, B 是图 G 的子图 , 记 $N(A) = \bigcup_{v \in V(A)} N(v)$, $N_B(A) = N(A) \cap V(B)$, 以 α 表示连通图的独立数 .

本文的主要结果如下 :

定理 1 如果 G 是连通图 , 且对满足 $1 \leq |N(x) \cap N(y)| \leq \alpha - 1$ 的任意不相邻的顶点 x, y 有 $|N(x) \cup N(y)| \geq n - \delta - 1$, 则 G 是可迹的 . 此定理在某种意义下是最好可能的 .

取互不相交的完全图 K_2, K_2, K_1, K_1 , 将其中一 K_1 的顶点分别与其余 3 个完全图的顶点连接 , 由此所得的图记为 G' . 对于图中的任意不相邻的 2 个顶点 x, y 都有 $|N(x) \cap N(y)| = 1$, 即满足 $1 \leq |N(x) \cap N(y)| \leq \alpha - 1$, 同时容易验证 $|N(x) \cup N(y)| \geq n - \delta - 1 = 2$, 但是 G' 不是可迹的 .

推论 设 G 是连通图 , 若对任意距离为 2 的顶点 x, y 满足 $d(x) + d(y) \geq n - \delta - 1$, 则 G 是可迹的 .

1 基本引理

在本节中 , 假设 G 是简单图 . 设 C 是一个给定方向的圈 , 具有 m 个顶点 , 不妨记为 $C = x_1 x_2 \dots x_m x_1$. 记 $N_m^+(u) = \{x_{i+1} : x_i \in N_m(u)\}$, $N_m^-(u) = \{x_{i-1} : x_i \in N_m(u)\}$ 及 $[x_i, x_j] = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_j\}$, 其中下标模 m .

对于给定的 C 上的 2 个顶点 a, b , 分别以 $C[a, b]$ 和 $C-[a, b]$ 记 C 上从 a 到 b 的路及反方向从 b 到 a 的路 . 圈 C 称为极大圈 , 如果不存在圈 C^* , 使得 $|V(C)| < |V(C^*)|$, 且 $V(C) \cap V(C^*) = V(C)$. 类似地 , 有极大路的概念 .

总设 G 是连通非 Hamilton 图 , $C = x_1 x_2 \dots x_m x_1$ 是图 G 的一个极大圈 , H 是满足 $|N_C(H)| \geq 2$ 的 $G - C$ 的一个分支 . 下面的引理 1 和引理 2 可类似地由文献 [9] 中引理证明方法得到 .

引理 1 设 G 是连通非 Hamilton 图 , $C = x_1 x_2 \dots x_m x_1$ 是图 G 的一个极大圈 , H 是满足 $|N_C(H)| \geq 2$ 的 $G - C$ 的一个分支 . 不妨设 x_i, x_j 是 $N_C(H)$ 中 2 个相异顶点 , 且 $x_0 x_i \in E(G)$, 则

- $\{x_{i-1}, x_{i+1}, x_{j-1}, x_{j+1}\} \cap N_C(H) = \emptyset$, 且 $N(x_{i+1}) \cap N_{G-C}(x_0) = \emptyset$;
- $x_{i+1} x_{j+1} \notin E(G)$ 且 $x_{i-1} x_{j-1} \notin E(G)$;
- 如果存在顶点 $x_t \in [x_{j+2}, x_i]$ 使得 $x_t x_{j+1} \in E(G)$, 则 $x_{t-1} x_{i+1} \notin E(G)$, 且 $x_{t-1} \notin N_C(H)$;

收稿日期 : 2008-05-05

基金项目 : 河海大学自然科学基金(2008428511)

作者简介 : 张丽丽(1977 —) , 女 , 山东淄博人 , 讲师 , 博士 , 主要从事图论与组合优化研究 .

d. 如果存在顶点 $x_i \in [x_{i+2}, x_{j-2}]$ 使得 $x_i x_{j+1} \in E(G)$ 则 $x_{i+1} x_{i+1} \notin E(G)$;

e. $V(G) - V(C) - V(H)$ 中不存在与顶点 x_{i+1} 和 x_{j+1} 同时相邻的顶点.

引理2 设 G 是 n 阶连通图, α 是 G 的独立数, $C = x_1 x_2 \dots x_m x_1$ 是 G 的一个极大圈, H 是满足 $|N_C(H)| \geq 2$ 的 $G - C$ 的一个分支. 不妨设 $x_i, x_j \in N_C(H)$ 且 $[x_{i+1}, x_{j-1}] \cap N_C(H) = \emptyset$. 令 $x_0 \in V(H), x_0 x_i \in E(G)$, 则 $1 \leq |N(x_{i+1}) \cap N(x_0)| \leq \alpha - 1$ 及 $|N(x_{i+1}) \cap N(x_{j+1})| \leq \alpha - 1$.

引理3 设 G 是 n 阶连通图, α 是 G 的独立数, $C = x_1 x_2 \dots x_m x_1$ 是 G 的一个极大圈, H 是满足 $|N_C(H)| \geq 2$ 的 $G - C$ 的一个分支. 不妨设 $x_i, x_j \in N_C(H)$ 且 $[x_{i+1}, x_{j-1}] \cap N_C(H) = \emptyset$. 令 $x_0 \in V(H), x_0 x_i \in E(G)$ 则

a. $|N(x_{i+1}) \cup N(x_0)| \leq n - (d(x_{j+1}) - |\{x_{j-1}, x_j\}|) - |\{x_{i+1}, x_0\}| \leq n - d(x_{j+1})$;

b. $d(x_{i+1}) + d(x_0) \leq n - 1$;

c. $|N(x_{i+1}) \cup N(x_{j+1})| \leq n - |N_C^+(x_0)| - |N_{G-C}(x_0)| - |\{x_0\}| \leq n - d(x_0) - 1$;

d. $d(x_{i+1}) + d(x_{j+1}) \leq n - 1$.

证明 断言1: 如果对 $x_h \in [x_{j+2}, x_i]$ 有 $x_h x_{j+1} \in E(G)$ 则 $x_{h-1} x_{i+1} \notin E(G), x_{h-1} x_0 \notin E(G)$. 这是引理1a的结论.

断言2: 如果对 $x_h \in [x_{i+1}, x_{j-2}]$ 有 $x_h x_{j+1} \in E(G)$ 则 $x_{h+1} x_{i+1} \notin E(G), x_{h+1} x_0 \notin E(G)$. 根据引理1d和引理2的条件易得.

断言3: 如果 $x_{j-1} x_{j+1} \in E(G)$ 则 $x_j x_{i+1} \notin E(G)$. 根据引理1c得到.

a. 根据断言1和断言2, 对 x_{j+1} 的任意邻点 $u \notin \{x_{j-1}, x_j\}$, 总能存在一个对应的顶点 v , 使得 $v \notin N(x_{i+1}) \cup N(x_0)$. 因此, $|N(x_{i+1}) \cup N(x_0)| \leq n - (d(x_{j+1}) - |\{x_{j-1}, x_j\}|) - |\{x_{i+1}, x_0\}| \leq n - d(x_{j+1})$.

b. 由引理1a, 有 $N(x_{i+1}) \cap N_{G-C}(x_0) = \emptyset$; 由引理1c, 有 $N(x_{i+1}) \cap N_C^+(x_0) = \emptyset$, 于是 $d(x_{i+1}) \leq n - |N_C^+(x_0)| - |N_{G-C}(x_0)| - |\{x_0\}| \leq n - d(x_0) - 1$, 从而 $d(x_{i+1}) + d(x_0) \leq n - 1$.

c. 因为 $N(x_{i+1}) \cap N_{G-C}(x_0) = \emptyset, N(x_{j+1}) \cap N_{G-C}(x_0) = \emptyset$ 且 $N(x_{i+1}) \cap N_C^+(x_0) = \emptyset, N(x_{j+1}) \cap N_C^+(x_0) = \emptyset$, 因此, $|N(x_{i+1}) \cup N(x_{j+1})| \leq n - |N_C^+(x_0)| - |N_{G-C}(x_0)| - |\{x_0\}| \leq n - d(x_0) - 1$.

d. 由断言1, 2, 3, 对任意的顶点 $u \neq x_j$, 总存在一个顶点与 x_{j+1} 相邻, 从而 $d(x_{i+1}) \leq n - (d(x_{j+1}) - |\{x_j\}|) - |\{x_{j+1}\}| - |V(H)|$, 于是 $d(x_{i+1}) + d(x_{j+1}) \leq n - 1$.

2 定理1的证明

证明 用反证法. 假设 G 不存在 Hamilton 路. 令 $P: x_1 x_2 \dots x_m$ 是 G 的一条最长路, 则 P 不是 Hamilton 路. 设 H 是 $G - P$ 的一个分支. 分以下几种情况讨论.

a. $|N_P(H)| \geq 2$. 连接 $x_1 x_m$, 得到的新图为 G' , 其任意顶点 v 的度记作 $d'(v)$, 其他符号也采用类似的记法.

由路 P 添加 $x_1 x_m$ 得到的圈记作圈 C , 则圈 C 是 G' 的最大圈, $H' = H$ 是 $G' - C$ 的一个分支, 且 $|N_C(H')| \geq 2$. 不妨设 $x_i, x_j \in N_C(H')$, 且 $x_0 x_i \in E(G') [x_{i+1}, x_{j-1}] \cap N_C(H') = \emptyset$. 根据引理2, 得 $1 \leq |N'(x_{i+1}) \cap N'(x_0)| \leq \alpha' - 1$. 再由引理3, 得 $|N'(x_{i+1}) \cup N'(x_0)| \leq n - (d'(x_{j+1}) - |\{x_{j-1}, x_j\}|) - |\{x_{i+1}, x_0\}|$.

事实上, $\alpha' \leq \alpha$. 于是, $1 \leq |N(x_{i+1}) \cap N(x_0)| \leq \alpha' - 1 \leq \alpha - 1$. 再由路 P 的最长性可得 $x_0 x_1, x_0 x_m, x_1 x_{i+1}, x_m x_{i+1} \notin E(G)$, 从而, $|N(x_{i+1}) \cup N(x_0)| \leq |N'(x_{i+1}) \cup N'(x_0)| \leq |V(G')| - (d'(x_{j+1}) - |\{x_{j-1}, x_j\}|) - |\{x_1, x_0, x_m, x_{i+1}\}| = n - (d(x_{j+1}) - |\{x_{j-1}, x_j\}|) - |\{x_1, x_0, x_m, x_{i+1}\}| \leq n - d(x_{j+1}) - 2 \leq n - \delta - 2$. 矛盾.

b. $|N_P(H)| = 1$ 且至少有2个分支, 记作 $H_1 = x_0, H_2 = v$. 连接 $x_1 x_m, x_0 v$ 得到的新图为 G' , 其任意顶点 v 的度记作 $d'(v)$, 其他符号也采用类似的记法.

由路 P 添加 $x_1 x_m$ 得到的圈记作圈 C , 则圈 C 是 G' 的最大圈, $H' = H_1 \cup H_2$ 是 $G' - C$ 的一个分支, 且 $|N_C(H')| \geq 2$. 不妨设 $x_i, x_j \in N_C(H')$, 且 $[x_{i+1}, x_{j-1}] \cap N_C(H') = \emptyset$. 根据引理2, 得 $1 \leq |N'(x_{i+1}) \cap$

$|N'(x_{j+1})| \leq \alpha' - 1$. 根据引理 3c, 有 $|N'(x_{i+1}) \cup N'(x_{j+1})| \leq |V(G')| - |N'_C(x_0)| - |N'_{G-C}(x_0)| - |\{x_0\}| \leq n - d'(x_0) - 1$.

事实上, $\alpha' \leq \alpha$, 于是, $1 \leq |N'(x_{i+1}) \cap N'(x_0)| \leq \alpha' - 1 \leq \alpha - 1$, 且 $d'(x_0) = d(x_0) + 1$.

于是, $|N(x_{i+1}) \cup N(x_{j+1})| \leq |N'(x_{i+1}) \cup N'(x_{j+1})| \leq |V(G')| - |N'_C(x_0)| - |N'_{G-C}(x_0)| - |\{x_0\}| \leq n - d'(x_0) - 1 = n - d(x_0) - 2 \leq n - \delta - 2$. 矛盾.

c. $|N_C(H)| = 1$, 且只有一个分支, 即 $H = x_0$.

不妨设 $x_0 x_i \in E(G)$, 且分别记 $P[x_1, x_i]$ 与 $P[x_{i+1}, x_m]$ 为路 P_1 与 P_2 . 由于路的方向是预先给定的, 所以可以通过给定路 P 的方向使得路 P_1 的长度尽可能长并且不小于路 P_2 的长度. 于是, $P[x_1, x_i]x_0$ 是一条以 x_1 为起点以 x_0 为终点的极长路.

由 $|N(x_0)| = 1$ 得 $\delta(G) = 1$, 又 $x_{i-1}x_0 \notin E(G)$, 且 $1 \leq |N(x_{i-1}) \cap N(x_0)| \leq \alpha - 1$, 于是根据定理的条件得 $d(x_{i-1}) \geq n - \delta - 2 = n - 3$. 事实上, 由路 P 的最长性和路 P_1 的极长性, 得 $x_{i-1}x_m, x_{i-1}x_{i+1} \notin E(G)$, 于是, $d(x_{i-1}) < n - 3$. 矛盾.

定理证毕.

参考文献:

- [1] 卜月华. 图论及其应用[M]. 南京: 东南大学出版社, 2000.
- [2] ORE O. A note on hamiltonian circuits[J]. Am Math Mon, 1960, 67: 55.
- [3] AINOUCHE A. Four sufficient conditions for Hamiltonian graphs[J]. Discrete Math, 1991, 89: 195-200.
- [4] ZHANG Li-li, ESCHEN E, LAI Hong-jian, et al. The s-hamiltonian index[J]. Discrete Math, 2008, 308: 4779-4785.
- [5] FAN Geng-hua. New sufficient conditions for cycles in graphs[J]. J Combin Thoery Ser B, 1984, 37: 221-227.
- [6] FLANDRIN E, JUNG H A, LI Hao. Hamiltonism, degree sum and neighborhood intersections[J]. Discrete Math, 1991, 90: 41-52.
- [7] WU Zheng-sheng, ZHANG Xue-rong, ZHOU Xing-he. Hamiltonicity, neighborhood intersection and the partially square graphs[J]. Discrete Math, 2002, 242: 245-254.
- [8] 张丽丽. 连通图可迹及几乎可迹的两个新充分条件[J]. 南京师范大学学报: 自然科学版, 2002, 25(1): 1-7.
- [9] 张丽丽. 图的 Hamilton 性的几个充分条件[D]. 南京: 南京师范大学, 2002.

New sufficient condition for making connected graphs be traceable

ZHANG Li-li

(College of Computer and Information Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: In order to study the Hamiltonian cycles of connected graphs, the relationship between the local property and the whole property might be considered. Based on the restriction of the conditions for the neighborhood union and neighborhood intersection, the following theorem was proven: if G is connected and the arbitrary pair of nonadjacent vertices (x, y) , such that $1 \leq |N(x) \cap N(y)| \leq \alpha - 1$, satisfies the condition $|N(x) \cup N(y)| \geq n - \delta - 1$, then G is traceable (α stands for the independent sets of G). A sufficient condition for the connected graphs was proposed according to the results. The sufficient condition, the inference of the theorem indicates that the above theorem, is the most possible in some sense.

Key words: connected graph; Hamilton; neighborhood union; neighborhood intersection; traceability