

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2009.04.007

大体积混凝土温度场高速求解方法的改进

陈国荣¹,李皇胜¹,李红健²

(1.河海大学土木工程学院,江苏 南京 210098;2.温州市水利局,浙江 温州 325000)

摘要:在超松弛预条件共轭梯度法(SSOR-PCG)的基础上,提出了变初值的迭代方法.该方法用前一时间步的温度值作为下一时间步的初值,与原来方法相比,求解速度可提高 1/3 左右.采用该迭代解法编制了温度场有限元程序,并对某碾压混凝土重力坝的瞬态温度场进行了仿真计算.计算结果表明,该方法具有很快的求解速度,20 万自由度的温度场计算,求解 1 次(1 个时间步)只需 31 s.

关键词:大体积混凝土 瞬态温度场 预条件共轭梯度法 迭代初值

中图分类号:TV315 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-1980(2009)04-0396-04

温度场的确定是大体积混凝土温控的先决条件.为防止产生裂缝,大体积混凝土结构通常分层分块跳仓浇筑,用有限元法进行其施工过程温度及温度应力仿真分析时,必须对各层分别划分单元网格.如果要精确考虑水管冷却效应,还需要在水管附近划分密集网格.一般混凝土大坝 100 浇筑层温控问题,划分精细网格,结点总数约为 140 万个^[1],计算规模巨大.又由于早期混凝土的徐变度、水化热和弹性模量变化大,计算时间步长不能取得太大,计算步数成百上千,而且每一时步都要重新求解有限元方程组,计算工作量十分庞大.因此,对温控仿真分析来讲,提高计算速度非常重要.针对有限元方程组系数矩阵稀疏性的特点,采用预条件共轭梯度法(PCG)进行迭代求解,可以降低迭代矩阵的条件数,提高迭代求解的稳定性和求解速度.预条件矩阵不同,便构成不同的预条件共轭梯度法.最重要的方法是不完全 Cholesky 分解预条件共轭梯度法(ICCG)和对称超松弛预条件共轭梯度法(SSOR-PCG).Hu 等^[2-5]从不同角度证明了这些算法的收敛性和适用性.孙林松等^[6]将预条件共轭梯度法应用到拱坝有限元重分析中;张永杰等^[7-8]在 ICCG 方法的基础上,考虑到分解因子中元素的实际大小,加上了对角元修正策略,使方程组求解能够快速准确地进行下去;林绍忠^[9]对 SSOR-PCG 法中的松弛因子进行了研究,指出当松弛因子取 1.0 时迭代速度最快,并编制了计算程序.除了松弛因子外,迭代初值的选取是 SSOR-PCG 法迭代速度和稳定性的另一关键因素.本文在文献[9]研究的基础上,研究了不同初值方案对迭代速度和稳定性的影响,提出了变初值的迭代方法,并基于该求解方法编制了三维有限元温控仿真程序,计算了某重力坝施工全过程的温度场.

1 不稳定温度场计算原理

根据变分原理,三维不稳定温度场问题等价于下列泛函的极值问题:

$$\Pi = \int_V \frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \int_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) T dV + \int_S \bar{\beta} \left(\frac{1}{2} T^2 - T_a T \right) dS \quad (1)$$

划分成有限个单元后,结构的总泛函 $I(T)$ 等于各单元泛函之和,单元的泛函为

$$\Pi^e = \int_{V^e} \frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \int_{V^e} \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) T dV + \int_{S^e} \bar{\beta} \left(\frac{1}{2} T^2 - T_a T \right) dS \quad (2)$$

其中

$$\bar{\beta} = \frac{\beta}{c\rho}$$

式中: c ——比热容; ρ ——密度; T ——温度; t ——时间; α ——导温系数; β ——混凝土表面放热系数; θ ——绝热温升; T_a ——与混凝土接触介质的温度; V ——结构的体区域; V^e ——单元所包含的体区域; S ——结构的面区域; S^e ——单元放热表面的面区域.

单元内任一点的温度与温度变化率用插值函数表示为

$$T(x,y,z,t) = NT^e \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = N \frac{\partial T^e}{\partial t} \tag{4}$$

式中： N ——形函数矩阵， $N = [N_1 \ N_2 \ \cdots]$ ； T^e ——单元结点温度列阵。

将式(3)和式(4)代入式(2)后,由泛函的极值条件得不稳定温度场的求解方程

$$(H + G)T + R \frac{\partial T}{\partial t} = F \tag{5}$$

式中： H ——整体热传导矩阵； G ——放热边界对热传导矩阵的贡献矩阵； R ——整体热容矩阵； F ——整体温度荷载列阵。它们分别由各单元系数矩阵集合而成。

采用向后差分格式,由式(5)得到 t_{n+1} 时刻结点温度 T_{n+1} 的求解方程

$$\left(H + G + \frac{1}{\Delta t}R\right)T_{n+1} = \frac{1}{\Delta t}RT_n + F_{n+1} \tag{6}$$

式中： Δt ——时间步长。

2 预条件共轭梯度法

在某一时间步,方程(6)可以写成标准的线性代数方程组

$$Ax = b \tag{7}$$

式中： A —— n 阶对称正定矩阵； x ——列向量； b ——右端列向量。关于该方程组的解法,Hestenes 等^[10]提出了共轭梯度算法(CG)。这种解法虽然是求解 n 维联立一次方程组的迭代解法,但用有限的迭代次数(最多 n 次)即可得到精确解,因而引起人们的重视。但是,计算机是以有限位数进行计算的,计算过程中舍入误差不断介入,使共轭梯度法的正交性不再成立,有时会产生数值计算上与理论上的严重偏离。预条件共轭梯度法(PCG)是对共轭梯度法的改进解法,即先降低方程的条件数,然后再进行迭代计算。

超松弛预条件共轭梯度法(SSOR-PCG)利用对称逐步超松弛迭代法(SSOR 法)的分裂矩阵作为预条件矩阵,将矩阵 A 表达成 $A = D - C_L - C_L^T$,选取式(8)为矩阵 A 的一个近似。

$$M = \frac{(D\omega^{-1} - C_L)D^{-1}(D\omega^{-1} - C_L)^T}{\omega(2 - \omega)} \approx A \tag{8}$$

式中： D —— A 的对角阵； C_L —— A 的严格下三角矩阵； ω ——松弛因子， $0 < \omega < 2$ 。而 M 具有 LL^T 形式,即

$M = LL^T$,其中 $L = \frac{(D - \omega C_L)D^{-1/2}}{\sqrt{\omega(2 - \omega)}}$ 。这样,可用方程

$$(L^{-1}AL^{-T})(L^Tx) = L^{-1}b \tag{9}$$

或 $Fy = g$ \tag{10}

代替方程(7)。其中 $F = L^{-1}AL^{-T}$ $y = L^Tx$ $g = L^{-1}b$ \tag{11}

由 A 的迭代近似表达式可得

$$F \approx L^{-1}(LL^T)L^{-T} = (L^{-1}L)(L^TL^{-T}) = I$$

式中 I 为单位阵。可见,预条件后 F 的谱条件数近似于条件数的最小值。

现有的超松弛法预条件的标准迭代格式,往往还是要牺牲不小的计算量来实现刚度矩阵和预条件因子内存的共用,本文采用的方法为改进的对称逐步超松弛迭代预条件共轭梯度法(SSOR-PCG)^[9],该迭代格式由于避免了系数矩阵和方向向量的乘积,比原迭代格式可省 8% ~ 50% 的乘法运算。

3 瞬态温度场的迭代初值

预条件共轭梯度法的初值 x_0 理论上是可以任意选取的,为了编程方便,通常取一个固定值,但如果所取 x_0 与方程的真解 x^* 很接近,则在迭代次数较少的情况下就能很快收敛于解向量,否则收敛速度就很慢,甚至发散。大体积混凝土结构在整个施工及运行过程中,由于混凝土水化热和外界气温的变化,温度场的变化很大,如果取某一固定值为初值,该初值离真解就很远,迭代次数就多,收敛速度就慢。在温控计算过程中,初期由于温升较快,时间步长要取得较小。总之,在温控计算中,2 个时间步的温度分布要比较接近。另外,为了

保证计算精度,2 个时间步的温差也不能太大.因此,在温控计算过程中,取前一时间步的温度值作为下一时间步温度场解的初值,可以达到最快的收敛速度.

4 算 例

4.1 算例 1

某碾压混凝土重力坝坝顶长 1 250 m,最大坝高 159 m.取溢流坝段进行温控计算.混凝土浇筑温度为 17℃,浇筑层厚 1.5 m 左右,间歇期为 7 d,假设 4 d 拆模.从 2006 年 7 月 1 日开始浇筑施工,不采取其他温控措施,环境温度参数按工程所在地实际资料选取.有限元网格如图 1 所示,共有 4 500 个单元、5 600 个结点.

从表 1 可见,不管初值如何取法迭代都是收敛的,说明预条件共轭梯度法解法对温度场有限元是稳定收敛的.但迭代初值对迭代速度有较大的影响,变初值(用前时间步的温度作为初值)效果最好,比固定初值取法迭代次数减少 1/3 左右.另外,该解法求解速度很快,全部施工过程的温度场计算时间只需 4.25 min(计算次数为 424 次).

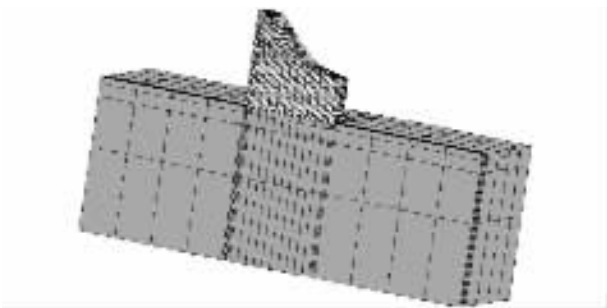


图 1 温度场有限元网格

Fig. 1 Finite element meshes of temperature fields

4.2 算例 2

某混凝土浇筑块长 40 m,宽 10 m,分 3 层浇筑,浇筑层厚 2 m,间歇期为 3 d.每一层中心埋有 5 根塑料冷却水管,直径 2.5 cm,壁厚 0.2 cm,导热系数为 1.66 kJ/(m·h·℃).浇筑层顶面和钢管共同散热,四周及底面为绝热.外界气温为 20℃,混凝土浇筑温度为 17℃,冷却水温度为 10℃,冷却水流量为 21.6 m³/d,冷却时间为 15 d,水的比热容为 4.187 kJ/(kg·℃).混凝土导热系数为 9.0 kJ/(m·h·℃),导温系数为 0.004 18 m²/h.绝热温升 $\theta = 21.66(1 - e^{-0.49\tau^{0.65}})$.水管冷却效应计算采用笔者提出的无需在水管附近划分密集网格的方法.为了测试计算的收敛性和计算效率,把该浇筑块剖分成 189 189 个空间六面体单元,共有 20 万个结点.

从表 2 可见,该方法求解速度非常快,20 万表自由度问题求解 1 次只需 31 s.该例迭代初值对迭代速度的影响不大,因为该例网格各单元的形状和尺寸完全相同,方程组矩阵的系数基本相同,矩阵的条件数很小,形态良好.实际工程有限元网格单元大小差别较大,初值对迭代速度的影响是比较大的,用迭代法求解时,网格越均匀,求解速度越快,稳定性越好.

图 2 是考虑水管冷却作用 12 d 后的温度场分布.由图 2 可知,水管附近等值线密集,温度变化很大,温度

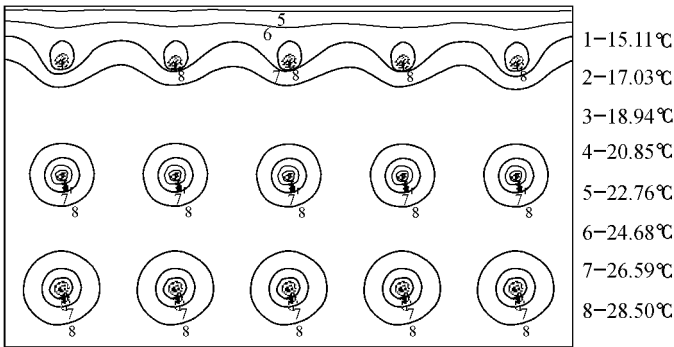


图 2 水管冷却温度场等值线

Fig. 2 Contours of temperature fields of cooling pipes

表 1 温度场不同初值对迭代收敛的影响

Table 1 Influence of different initial values of temperature fields on iterative convergence

初值取法	平均迭代次数	总计算时间/min
初始温度 0℃	17	6.55
初始温度 20℃	15	6.05
变初值	10	4.25

表 2 规整网格温度场初值对迭代收敛的影响

Table 2 Influence of initial values of uniform mesh temperature fields on iterative convergence

初值取法	平均迭代次数	单次计算时间/s
初始温度 0℃	19	36
初始温度 20℃	17	33
前时间步的温度	16	31

分布规律与实际情况相符,水管冷却效果非常明显,最高温度为 28.50℃,比没有水管冷却时减小了近 8℃.

5 结 论

超松弛预条件共轭梯度法具有很快的求解速度,20 万自由度温度场计算,求解 1 次只需 31s.对瞬态温度场来讲,不管初值如何选取都能得到收敛解答,说明该解法对温度场问题具有稳定收敛性.但对于实际工程的温控问题,初值对求解速度有很大的影响,选前一时间步的温度值作为初值可以达到最快的收敛速度,求解速度比固定初值方法要快 1/3 左右.

参考文献:

[1] 朱伯芳.混凝土坝水管冷却仿真计算的复合算法[J].水利水电技术,2003,34(11):47-50.
[2] HU Y F, STOREY C. Global convergence result for conjugate gradient methods[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1991, 71(2):399-405.
[3] AL-BAALI M, FLETCHER R. On the order of convergence of preconditioned nonlinear conjugate gradient method[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1996,17(3):658-665.
[4] KURICS T. On the superlinear convergence of PCG algorithms: numerical experiments for convection-diffusion equations[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008,55(10):2318-2328.
[5] 徐道远,王宝庭,王向东,等.求解大型稀疏矩阵的 ICCG 法[J].工程力学,1999(增刊):419-422.
[6] 孙林松,郭兴文,李春和.预条件共轭梯度法在拱坝有限元重分析中的应用[J].河海大学学报:自然科学版,2009,37(2):236-239.
[7] 张永杰,孙秦.大型稀疏线性方程组改进的 ICCG 方法[J].飞机工程,2005(3):39-42.
[8] 张永杰,孙秦.大型稀疏线性方程组新的 ICCG 方法[J].数值计算与计算机应用,2007,28(2):133-138.
[9] 林绍忠.对称逐步超松弛预处理共轭梯度法的改进迭代格式[J].数值计算与计算机应用,1997(4):266-270.
[10] HESTENES M R, STIEFEL E. Method of conjugate gradients for solving linear systems[J]. J Res Nat Bur Standards,1952,49:409-436.

Improvement of fast solution method for mass concrete temperature fields

CHEN Guo-rong¹, LI Huang-sheng¹, LI Hong-jian²
(1. College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China ;
2. Bureau of Water Resources of Wenzhou Municipality, Wenzhou 325000, China)

Abstract: An iterative method for determining variable initial values is proposed based on the symmetric successive over-relaxation preconditioned conjugated gradient (SSOR-PCG) method. The temperature value of the previous time step is regarded as the initial value of the next time step. Compared with the original approach, the solution speed increases by about 1/3. Using the iterative method, a finite element program for the temperature fields was compiled and was employed to simulate the transient temperature fields of a RCC gravity dam. The calculated results show that the present method has a high solution speed. For example, only 31 seconds are needed to solve a temperature field with 20×10^4 DOF once (one time step).

Key words: mass concrete ; transient temperature field ; PCG ; iterative initial value