

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2009.04.024

一类高维 Liénard 型系统周期解的存在性

陈能福 ,安天庆

(河海大学理学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :利用重合度理论中的新 Borsuk 定理 ,得到了高维 Liénard 型系统

$$u''(t) + \frac{d}{dt} \nabla F(u(t)) + \nabla G(u(t)) = e(t)$$

存在周期解的充分条件 . 将线性变换引入先验估计 ,把 F 和 G 要求的非退化特征推广到了具有一定退化性质的情形 .

关键词 :周期解 ;Liénard 型系统 ;重合度

中图分类号 :O177

文献标识码 :A

文章编号 :1000-1980(2009)04-0483-04

本文考虑具有

$$u''(t) + \frac{d}{dt} \nabla F(u(t)) + \nabla G(u(t)) = e(t) \quad (1)$$

的系统周期解的存在性问题 . 其中 $u: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^N$, $F \in C^2(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$, $G \in C^2(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$, $e \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^N)$, 且存在常数 $\omega > 0$, 使得 $e(t + \omega) = e(t)$ 对 $\forall t \in \mathbf{R}$ 成立 .

文献 [1] 利用 Krasnoselskii 不动点定理得出了如下结论 :

定理 A 若存在常数 $c_0 > 0$, $a_0 > 0$, $b_0 \geq 0$, $b_1 \geq 0$, $\alpha \geq 1$ 满足条件

$$F''(x)y \cdot y \geq c_0 \|y\|_2^2 \quad (\forall x, y \in \mathbf{R}^N)$$

$$G(x) \geq 0, G(x) \geq a_0 \|x\|_2^2 - b_0 \quad (\forall x \in \mathbf{R}^N)$$

$$\nabla G(x) \cdot x \geq a_1 G(x) - b_1 \quad (\forall x \in \mathbf{R}^N)$$

则式 (1) 至少有一个以 ω 为周期的解 . 其中 $\cdot, \|\cdot\|_2$ 分别表示 $\mathbf{R}^N$ 中的内积和 Euclid 范数 .

文献 [2] 得出了若 $\nabla G(s) \cdot s \leq -\|e\|_2 \|s\|_2$, 则式 (1) 至少有一个以 ω 为周期的解的结论 . 文献 [3] 将定理 A 推广到了 p -laplace 形式 , 得出了更为广泛的结论 . 文献 [4-8] 还得出了一些其他结论 .

本文利用重合度理论得到了和现有文献不同的结论 . 特别地 , 本文推广了文献 [3] 定理 3.1 在 $p = 2$ 时的结论 . 文中用 $\cdot, \|\cdot\|_p$ 表示 $\mathbf{R}^N$ 中的 Euclid 内积 , $\|\cdot\|_p$ 表示 $\mathbf{R}^N$ 的 p 范数 , 即 $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. $\mathbf{R}^{N \times N}$ 空间的 p 范数定义为 $\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$. 相应地 , $L^p([0, \omega], \mathbf{R}^N)$ 空间的 L^p 范数定义为 $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^N \int_0^\omega |x_i(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$. $L^\infty([0, \omega], \mathbf{R}^N)$ 空间的范数定义为 $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} \|x_i\|_\infty$, 其中 $\|x_i\|_\infty = \sup_{t \in [0, \omega]} |x_i(t)|$ ($i = 1, \dots, N$).

1 预备知识

设 X, Z 为实的赋范向量空间 . 线性算子 $L: X \rightarrow Z$ 是一个零指标的 Fredholm 算子 ; $N: X \rightarrow Z$ 是一个连续算子 . Ω 是 X 中的有界开子集 , N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L 紧的 [9].

引理 1 [10] 设 L 是零指标的 Fredholm 算子 , Ω 是 X 中包含原点的开子集 , 并且关于原点对称 . $N_\lambda(x) : \bar{\Omega}$

$\times[0,1] \rightarrow Z$ 是 L 紧算子, 满足条件

$$N_{\lambda}(-x) = -N_{\lambda}(x) \quad (\forall x \in \bar{\Omega})$$

$$Lx \neq N_{\lambda}(x) \quad (\forall x \in \text{dom}(L) \cap \partial\Omega)$$

那么对 $\forall \lambda \in [0,1]$, 方程 $Lx = N_{\lambda}(x)$ 在 Ω 中至少有一个解.

为了利用重合度来研究式(1)的周期解问题, 将式(1)等价地变为

$$x'(t) = y(t) \quad (2)$$

$$y'(t) = -\frac{d}{dt} \nabla F(x(t)) - \nabla G(x(t)) + e(t) \quad (3)$$

如果 $(x(t), y(t))$ 是方程组(2)(3)的解, 那么它一定是式(1)的解.

令 $C_{\omega} = \{x \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^N) : x(t+\omega) = x(t), \forall t \in \mathbf{R}\}$ 并具有范数 $\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} \|x_i\|_{\infty}$, $X = Z = \{z = (x(t), y(t)) : z(t+\omega) = z(t), \forall t \in \mathbf{R}\}$ 并具有范数 $\|z\| = \max\{\|x\|_{\infty}, \|y\|_{\infty}\}$, 易见 X, Z 为 Banach 空间.

令

$$L : \text{dom}(L) \rightarrow Z, \quad (Lz)(t) = z'(t)$$

$$N : X \rightarrow Z, \quad (Nz)(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ -\frac{d}{dt} \nabla F(x(t)) - \nabla G(x(t)) + e(t) \end{bmatrix} := H(z, t)$$

易得 L 是零指标 Fredholm 算子. 设 Ω 是 $\text{In}(L)$ 中的有界子集, 根据 F, G 的可微性, 可知 N 是连续有界的. 计算可知 N 是 $\bar{\Omega}$ 上的 L 紧算子.

2 主要结论和证明

定理 1 如果存在常数 $a > 0, b > 0, c \geq 0, \alpha \geq 1$ 和对称矩阵 $A = (a_{ij})_{N \times N}, B = (b_{ij})_{N \times N}$ 满足条件

$$(a) \quad AG'(x) = G'(x)A \quad BF''(x) = F''(x)B \quad (\forall x \in \mathbf{R}^N)$$

$$(b) \quad F''(x)y^T Ay \geq a|y|_2^2 \text{ 或者 } F''(x)y^T Ay \leq -a|y|_2^2 \quad (\forall x, y \in \mathbf{R}^N)$$

$$(c) \quad Bx^T \nabla G(x) \geq b|x|_{\alpha}^{\alpha} - c \quad (\forall x \in \mathbf{R}^N)$$

则式(1)至少有一个以 ω 为周期的解.

证明 令

$$\begin{aligned} z(t) &= (x(t), y(t)) \\ N : X \rightarrow Z \quad (Nz)(t) &= \begin{bmatrix} y(t) \\ -\frac{d}{dt} \nabla F(x(t)) - \nabla G(x(t)) + e(t) \end{bmatrix} := H(z, t) \end{aligned}$$

$$N_{\lambda}(z, t) = \frac{1+\lambda}{2} H(z, t) - \frac{1-\lambda}{2} H(-z, t)$$

考虑参数方程

$$(Lz) = N_{\lambda}(z, t) \quad (4)$$

若 $z(t)$ 是式(4)的解, 则 $x(t)$ 是下列方程的 ω 周期解.

$$\begin{aligned} x''(t) + \frac{1+\lambda}{2} \frac{d}{dt} \nabla F(x(t)) - \frac{1-\lambda}{2} \frac{d}{dt} \nabla F(-x(t)) + \\ \frac{1+\lambda}{2} \nabla G(x(t)) - \frac{1-\lambda}{2} \nabla G(-x(t)) = \lambda e(t) \end{aligned} \quad (5)$$

下面对式(5)的周期解进行先验估计. 若 $x(t)$ 是式(5)的周期解, 则

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} Bx(t) x''(t) dt &= - \int_0^{\omega} Bx'(t) x'(t) dt \geq \\ &- \left| \int_0^{\omega} Bx'(t) |x'(t)|_2 dt \right| \geq \\ &- M \|x'(t)\|_2^2 \end{aligned}$$

其中 $M = \|B\|_2$. 由条件(a)知

$$\int_0^\omega Bx(t) \cdot \frac{d}{dt} \nabla F(x(t)) dt = - \int_0^\omega x'(t) \cdot B \nabla F(x(t)) dt = 0$$

利用条件(c), 对式(5)两边与 $Bx(t)$ 进行内积后在 $[0, \omega]$ 上积分可得

$$-M \|x'(t)\|_2^2 + b \|x(t)\|_\alpha^\alpha - c\omega \leq \|B\|_\alpha \|x(t)\|_\alpha \|\phi(t)\|_\beta \quad (6)$$

其中 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. 另一方面,

$$\int_0^\omega Ax'(t) \cdot x''(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^\omega \frac{d}{dt} Ax'(t) \cdot x'(t) dt = 0$$

由条件(a)知

$$\int_0^\omega Ax'(t) \cdot \nabla G(x(t)) dt = 0$$

对式(5)两边与 $Ax'(t)$ 进行内积后在 $[0, \omega]$ 上积分 根据条件(b)得到

$$a \|x'(t)\|_2^2 \leq K \|x'(t)\|_2 \|\phi(t)\|_2 \quad (K = \|A\|_2)$$

即

$$\|x'(t)\|_2 \leq \frac{K}{a} \|\phi(t)\|_2 := R_1$$

由式(6)得

$$b \|x(t)\|_\alpha^\alpha - \|B\|_\alpha \|x(t)\|_\alpha \|\phi(t)\|_\beta - c\omega \leq M \|x'(t)\|_2^2 \leq MR_1^2 := R_2$$

从而

$$\|x(t)\|_\alpha \leq R_3 \quad (7)$$

由式(7)知, 存在 $t_0 \in [0, \omega]$ 满足 $\|x(t_0)\|_\alpha \leq R_3 \omega^{-\frac{1}{\alpha}}$, 从而

$$|x_i(t)| = \left| x_i(t_0) + \int_{t_0}^t x_i'(s) ds \right| \leq R_3 \omega^{-\frac{1}{\alpha}} + \sqrt{\omega} \left(\int_0^\omega x_i'(s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq R_3 \omega^{-\frac{1}{\alpha}} + \sqrt{\omega} R_1 := R_4$$

故 $\|x\|_\infty \leq R_4$ 并且 $\|x\|_2 \leq \sqrt{N} R_4$. 由于 $F, G \in C^2(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$, 所以当 $\|x\|_2 \leq \sqrt{N} R_4$ 时, 存在 R_5, R_6 , 使得 $\|F'(x)\|_2 \leq R_5, \|\nabla G(x)\|_2 \leq R_6$. 因此

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |x''(t)|_2 dt &\leq R_5 \int_0^\omega |x'(t)|_2 dt + R_6 \omega + \int_0^\omega |\phi(t)|_2 dt \leq \\ &R_5 \sqrt{\omega} \|x'\|_2 + R_6 \omega + \int_0^\omega |\phi(t)|_2 dt := R_7 \end{aligned}$$

对于 $\forall i = 1, \dots, N$, 从 $x(t)$ 的周期性可知, 存在 $t_i \in [0, \omega]$ $x_i'(t_i) = 0$ 成立, 从而

$$|y_i(t)| = |x'(t)| = \left| \int_{t_i}^t x''(s) ds \right| \leq R_7$$

即 $\|y\|_\infty \leq R_7$. 选择 $R_8 > \max\{R_4, R_7\}$, 令 $\Omega = \{z \in X : \|z\| < R_8\}$, 那么对于任意的 $z \in \text{dom}(L) \cap \partial\Omega$, $\lambda \in [0, 1]$ 都有 $(Lz) \neq N_\lambda(z, t)$. 由于 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L 紧的, 故 $N_\lambda(z, t)$ 在 $\bar{\Omega} \times [0, 1]$ 上是 L 紧的, 且 $N_\lambda(z, t) = -N_\lambda(z, t)$. 根据引理1, 式(1)至少有一个以 ω 为周期的解.

若 A, B 为单位矩阵, 则结论就是文献[3]的定理3.1. 下面通过一个例子来说明本文定理1是文献[3]结论的实质性改进.

例1 考虑系统

$$x''(t) + \frac{d}{dt} \nabla F(x(t)) + \nabla G(x(t)) = \begin{bmatrix} 1 + \sin 2t \\ 2 - \cos 2t \end{bmatrix}$$

其中 $x = (x_1, x_2)$, $F(x_1, x_2) = x_1^2 - \sin x_1 - x_2^2 - x_2$, $G(x_1, x_2) = -x_1^4 + \cos x_1 + x_2^4 + e^{x_2}$.

令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} AG''(x) &= G'(x)A & BF''(x) &= F'(x)B \\ F''(x)y, Ay &\geq |y|_2^2 & Bx, \nabla G(x) &\geq 3|x|_4^4 - 4 \end{aligned}$$

根据定理 1, 上述系统至少有一个 π -周期解. 另一方面, 由于 $y^T \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} y = y_1^2(2 + \sin x_1) - y_2^2(2 + e^{x_2})$, 当 $y_1 = 0$, $y_2 \rightarrow \infty$ 时, $y^T \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} y \rightarrow -\infty$, 当 $y_2 = 0$, $y_1 \rightarrow \infty$ 时, $y^T \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} y \rightarrow \infty$. 故系统不满足文献 [3] 定理 3.1 的条件.

3 结 语

利用重合度理论研究 Liénard 系统的周期解时, 结论的强弱取决于先验估计的方法. 本文将线性变换引入先验估计, 利用推广的 Borsuk 定理得到了更广泛的结论.

参考文献:

- [1] DING Wei-yue. On the existence of periodic solutions for Liénard system[J]. Acta Math Sinica, 1982, 25: 627-632.
- [2] CAC N P. Periodic solutions of a second order nonlinear system[J]. J Math Anal Appl, 1997, 214(1): 219-232.
- [3] PENG Shi-guo, XU Zhi-ting. On the existence of periodic solutions for a class of p -laplacian system[J]. J Math Anal Appl, 2007, 325(1): 166-174.
- [4] TANG Yi, LI Ya-qiong. New results of periodic solutions for a kind of duffing type p -laplacian equation[J]. Math Anal Appl, 2008, 340(2): 1380-1384.
- [5] ZHANG Fu-xing, LI Ya. Existence and uniqueness of periodic solutions for a kind of duffing type p -laplacian equation[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2008, 9(3): 985-989.
- [6] AMSTER P, NAPOLI P D. Landesman-Lazer type conditions for a system of p -laplacian like operators[J]. Math Anal Appl, 2007, 326(2): 1236-1243.
- [7] CIEUTAT P. Almost periodic solutions of forced vectorial Liénard equations[J]. J Differential Equations, 2005, 209(2): 302-328.
- [8] GAO Fa-bao, LU Shi-ping. New results on the existence and uniqueness of periodic solutions for Liénard type p -laplacian equation[J]. Journal of the Franklin Institute, 2008, 345(4): 374-381.
- [9] 钟承奎, 范先令, 陈文塬. 非线性泛函分析引论[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1998: 44-45.
- [10] GAINES R E, MAWHIN J. Coincidence degree and nonlinear differential equations[M]. Berlin: Springer, 1977: 31-32.

Existence of periodic solutions for a class Liénard type system in $\mathbf{R}^N$

CHEN Neng-fu, AN Tian-qing

(College of Science, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Using the generalized Borsuk theorem from coincidence degree theory, some sufficient conditions for the existence of a Liénard type system in $\mathbf{R}^N$ of the form

$$u''(t) + \frac{d}{dt} \nabla F(u(t)) + \nabla G(u(t)) = \alpha(t)$$

were proposed. By introducing linear transformation into the a priori estimation, the non-degeneration characteristics required by F and G were generalized in order to be degenerated.

Key words: periodic solution; Liénard type system; coincidence degree