

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2009.04.025

一类半线性椭圆边值问题的多解性

蔡宏睿 ,安天庆

(河海大学理学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :利用临界点以及拓扑度理论讨论了一类半线性椭圆型方程边值问题的多解性 ,得到了适当条件下存在 3 个解的结论 .
关键词 :鞍点定理 ;Landesman-Lazer 条件 ;拓扑度 ;Morse 指标
中图分类号 :O175.24 文献标识码 :A 文章编号 :1000-1980(2009)04-0487-05

关于经典的微分方程解的存在性 ,已有一套比较经典的理论 .近 20 年来 ,出现了很多利用临界点的拓扑性质对方程解的个数进行估计的研究 .比如文献 [1]研究了椭圆共振问题的多解性质 .本文将要讨论一般的二阶椭圆型算子对应的共振问题 ,考虑半线性椭圆边值问题

$$\begin{cases} Lu + \lambda_1 u + g(u) = 0 & (x \in \Omega) \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \quad (1)$$

非平凡解的多重性 .这里 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界光滑区域 .基本条件与记号 : L 是二阶椭圆型算子 , $Lu(x) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$, $x \in \Omega$. 设系数矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是对称阵 , a_{ij} 是连续可微函数 ,并且满足一致性条件 $\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq c | \xi |^2$, $\forall x \in \Omega$, $\xi \in \mathbf{R}^n$. λ_j 是边值问题

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = 0 & (x \in \Omega) \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \quad (2)$$

的特征值 ,且满足 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. $g(\xi)$ 是一个 Caratheodory 函数 , $g(0)=0$,满足

$$0 \leq \liminf_{| \xi | \rightarrow \infty} \frac{g(\xi)}{\xi} \leq \limsup_{| \xi | \rightarrow \infty} \frac{g(\xi)}{\xi} \leq \gamma \quad (0 < \gamma < \lambda_2 - \lambda_1 \text{ a.e. } x \in \Omega) \quad (3)$$

定理 1 如果 $g'(0)>0$ 成立 ,或者 $\exists m \geq 2$,使得 $\lambda_m < \lambda_1 + g'(0) < \lambda_{m+1}$ 成立 ,并且 g 满足文献 [2]中的 (LL)型条件 ,则问题 (1)至少有 2 个非平凡解 .

采用文献 [2]的证明方法 ,将 Laplace 算子换成一般的椭圆型算子 .先利用鞍点定理证明此问题存在一个临界点 .由文献 [3]的证明方法可知 ,此问题满足鞍点定理的临界点 ,也满足山路引理 .利用文献 [4-5]的结论 ,讨论临界点 Morse 指标以及拓扑度就可以得到另外 2 个非平凡临界点 .文献 [6]还将文献 [2]中 Laplace 问题推广到了无界区域 .

1 鞍点定理

考虑边值问题

$$\begin{cases} Lu + \lambda_1 u + g(x , u) = 0 & (x \in \Omega) \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \quad (4)$$

这里 $g(x , \xi)$ 是一个 Caratheodory 实值函数 ,满足

$$0 \leq \liminf_{| \xi | \rightarrow \infty} \frac{g(x , \xi)}{\xi} \leq \limsup_{| \xi | \rightarrow \infty} \frac{g(x , \xi)}{\xi} \leq \chi(x) \quad (\text{a.e. } x \in \Omega) \quad (5)$$

$\chi(x)$ 是一个有界可测函数 ,并且 $\chi(x) < \lambda_2 - \lambda_1$ 在 Ω 的一个正测度子集上成立 .问题 (4)的解等价于泛函

$f: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}^1$ 的临界点.

$$f(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u dx - \frac{1}{2} \lambda_1 \int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\Omega} g(x, u) dx \quad (6)$$

其中 $g(x, \xi) = \int_0^{\xi} g(x, t) dt$. 易知

$$f'(u)v = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v dx - \lambda_1 \int_{\Omega} uv dx - \int_{\Omega} g(x, u)v dx \quad (7)$$

其中 $H_0^1(\Omega)$ 是通常的 Sobolev 空间^[7], 其内积和范数定义如下: $u, v = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla v dx$, $\|u\|^2 = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u dx$.

令 W 是 λ_1 对应的特征空间, V 是 W 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的正交补空间. $P: H_0^1(\Omega) \rightarrow W$ 是正交投影算子, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, $u^0 = Pu$, $u^+ = u - u^0$. 引入 Landesman-Lazer (LL) 如下:

$\forall u \in H_0^1(\Omega)$ 满足 $\|u_n\| \rightarrow \infty$, $\frac{\|u_n^0\|}{\|u_n\|} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$ 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x, u_n) \frac{u_n^0}{\|u_n^0\|} dx > 0$.

引理 1 假设 g 满足式 (5) 和 (LL) 条件, 则 f 满足 (PS) 条件^[8-9].

证明 设 $K: H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ 是由 $\int_{\Omega} (\lambda_1 u + g(x, u))v dx = \langle Ku, v \rangle$ 定义的算子, 则 K 是紧算子, 且 $f'(u) = u - Ku$. 设 $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ 满足 $f(u_n)$ 有界, $f'(u_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. 只需证明 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界. 反设

$\|u_n\| \rightarrow \infty$. 令 $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$, 由于 $\|v_n\| = 1$, 即 $\{v_n\}$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 中有界集, 并且 $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ 是紧嵌入, 所以 $\{v_n\}$ 有收敛子列. 不妨设 $\{v_n\}$ 满足 $v_n \rightarrow v$ ($v \in H_0^1(\Omega)$), $v_n \rightarrow v$ ($v \in L^2(\Omega)$), $v_n(x) \rightarrow v(x)$ 对于 $x \in \Omega$ 几乎处处成立 (这里第一个收敛是弱收敛), 则存在 $\lambda(x) \in L^2(\Omega)$, 使得 $|v_n(x)| < \lambda(x)$ 对于 $x \in \Omega$ 几乎处处成立. 由式 (5) 可得 $\left\{ \frac{g(x, u_n)}{\|u_n\|} \right\}$ 有界, 故还可以假设 $\frac{g(x, u_n)}{\|u_n\|} \rightarrow \tilde{g}v$, 其中 $\tilde{g} \in L^2(\Omega)$, 满足 $0 \leq \tilde{g}(x) \leq \gamma(x)$ 对于 $x \in \Omega$ 几乎处处成立.

对于 $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$, 由于 $\frac{f'(u_n)\varphi}{\|u_n\|} = \int_{\Omega} \frac{A \nabla u_n}{\|u_n\|} \cdot \nabla \varphi dx - \lambda_1 \int_{\Omega} \frac{u_n}{\|u_n\|} \varphi dx - \int_{\Omega} \frac{g(x, u_n)}{\|u_n\|} \varphi dx$, 再由假设 $f'(u_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 可得 $\int_{\Omega} A \nabla v \cdot \nabla \varphi dx - \lambda_1 \int_{\Omega} v \varphi dx - \int_{\Omega} \tilde{g}v \varphi dx = 0$. 由此式可知, v 是问题

$$\begin{cases} Lv + \lambda_1 v + \tilde{g}(v) = 0 & (x \in \Omega) \\ v = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \quad (8)$$

的非退化弱解. 利用 $v^0 = Pv$ 可知 $Lv^0 + \lambda_1 v^0 = 0$. 再由式 (8) 可得 $\tilde{g}(x)v = -Lv + \lambda_1 v$.

一方面, 计算可得 $\int_{\Omega} \tilde{g}(x)vv^+ dx = \int_{\Omega} A(x) \nabla v^+ \cdot \nabla v^+ dx - \lambda_1 \int_{\Omega} |v^+|^2 dx$, 将 $v = v^0 + v^+$ 代入可得 $\int_{\Omega} \tilde{g}(x)v^0v^+ dx = \int_{\Omega} A(x) \nabla v^+ \cdot \nabla v^+ dx - \int_{\Omega} (\lambda_1 + \tilde{g}(x))|v^+|^2 dx$; 另一方面 $\int_{\Omega} \tilde{g}(x)vv^0 dx = 0$, 将 $v = v^0 + v^+$ 代入可得 $\int_{\Omega} \tilde{g}(x)v^0v^+ dx = - \int_{\Omega} \tilde{g}(x)|v^0|^2 dx \leq 0$, 因此 $\int_{\Omega} A(x) \nabla v^+ \cdot \nabla v^+ dx - \int_{\Omega} (\lambda_1 + \tilde{g}(x))|v^+|^2 dx \leq 0$. 又因为 $\int_{\Omega} A(x) \nabla v^+ \cdot \nabla v^+ dx = - \int_{\Omega} v^+ Lv^+ dx \geq \lambda_2 \int_{\Omega} |v^+|^2 dx$, 可得 $\int_{\Omega} (\lambda_2 - \lambda_1 - \tilde{g}(x))|v^+|^2 dx \leq 0$. 但是 $\lambda_2 - \lambda_1 - \tilde{g}(x) \leq 0$ 不等号几乎处处成立. 由一致连续性质可知 $v^+ = 0$, 即 $v \in W$, 故有 $Pv = v$.

再由 $\frac{Pu_n}{\|u_n\|} \rightarrow Pv = v$ ($n \rightarrow \infty$) 可得 $\frac{u_n^0}{\|u_n\|} \rightarrow v$ ($n \rightarrow \infty$) $\Leftrightarrow \frac{\|u_n^0\|}{\|u_n\|} \rightarrow \|v\| = 1$ ($n \rightarrow \infty$). 由式 (7) 可得 $f'(u_n)u_n^0 = \int_{\Omega} A(x) \nabla u_n \cdot \nabla u_n^0 dx - \lambda_1 \int_{\Omega} u_n u_n^0 dx - \int_{\Omega} g(x, u_n)u_n^0 dx = - \int_{\Omega} g(x, u_n)u_n^0 dx$, $\forall n$. 由 $f'(u_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x, u_n) \frac{u_n^0}{\|u_n^0\|} dx = 0$. 这与 (LL) 条件矛盾.

应用鞍点定理证明 f 有临界点, 还需应用下面 2 个引理.

引理 2 若 g 满足 (LL) 条件, 则有 $f(u) = - \int_{\Omega} \alpha(x, u) dx \rightarrow -\infty, \|u\| \rightarrow \infty, u \in W$.

证明 利用 (LL) 条件容易验证: $\exists \delta, R > 0$, 使得 $\int_{\Omega} g(x, u) u dx \geq \delta \|u\|, \forall u \in W, \|u\| \geq R$. 对于给定的 $u \in W, \|u\| = 1$, 由于 $\alpha(x, \xi) = \int_0^{\xi} \alpha(x, t) dt$, 故 $\int_{\Omega} \alpha(x, tu) dx = \int_{\Omega} \alpha(x, Ru) dx + \int_{\Omega} \int_R^t g(x, su) u ds dx$. 因此, $\int_{\Omega} \alpha(x, tu) dx \geq \int_{\Omega} \alpha(x, Ru) dx + \delta \|u\| \int_R^t \frac{1}{s} \delta \|su\| ds = \int_{\Omega} \alpha(x, Ru) dx + \delta \|u\| (t - R)$. 这表明, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\int_{\Omega} \alpha(x, tu) dx \rightarrow \infty$. 由于 W 是一维的, 因此前式对于 $u \in W$ 一致成立. 因此有 $f(u) = - \int_{\Omega} \alpha(x, u) dx \rightarrow -\infty, u \in W, \|u\| \rightarrow \infty$.

引理 3 设 g 满足条件 (5) 则 f 在 V 上是强制的.

证明 定义泛函 $\mu: V \rightarrow R, \mu(v) = \|v\|^2 - \int_{\Omega} (\lambda_1 + \chi(x)) v^2 dx$. 显然 μ 是连续的, 凸的. 由此可知 μ 是弱下半连续的, 并且 $\mu(v) = 0$ 时 $v \equiv 0$. 因为 $\|v\|^2 = \int_{\Omega} A(x) \nabla v \cdot \nabla v dx \geq \lambda_2 \int_{\Omega} |v|^2 dx, \forall v \in V$, 所以 $\mu(v) \geq \int_{\Omega} (\lambda_2 - \lambda_1 - \chi(x)) v^2 dx \geq 0, \forall v \in V$. 由于 $\mu(v) = 0$, 因此 $v = 0$ 在 $\Omega' = \{x \in \Omega | \chi(x) < \lambda_2 - \lambda_1\}$ 上成立. 另一方面 $\rho = \mu(v) = \|v\|^2 - \int_{\Omega} (\lambda_1 + \chi(x)) v^2 dx \geq \|v\|^2 - \int_{\Omega} \lambda_2 v^2 dx \geq 0$. 由此可知 v 是 λ_2 对应的特征函数. 所以 v 在一个正测度集上等于零, 由连续唯一性知 $v \equiv 0$. 利用弱下半连续性还可以证明 $\exists \delta > 0$, 使得 $\mu(v) \geq \delta \|v\|_H^2, \forall v \in V$. 设 $0 < \varepsilon < \delta \lambda_2$, 由式 (5) 得到 $\exists B_{\varepsilon}(x) \in L^1(\Omega), 2\alpha(x, \xi) \leq (\chi(x) + \varepsilon) \xi^2 + B_{\varepsilon}(x)$. 因此对于几乎处处的 $x \in \Omega, \forall \xi \in R^1$ 有 $2f(v) = \|v\|^2 - \int_{\Omega} (\lambda_1 v^2 + 2\alpha(x, \xi)) dx = \mu(v) - \varepsilon \int_{\Omega} v^2 dx - \int_{\Omega} |B_{\varepsilon}| dx \geq \delta \|v\|^2 - \varepsilon \int_{\Omega} v^2 dx - C \geq \delta \|v\|^2 - \frac{\varepsilon}{\lambda_2} \|v\|^2 - C$. 此式对于 $\forall v \in V$ 和某个常数 C 成立. 因此 $2f(v) \geq \left(\delta - \frac{\varepsilon}{\lambda_2}\right) \|v\|^2 - C$. 所以 $f(v) \rightarrow \infty, v \in V, \|v\| \rightarrow \infty$ 即 f 在 $W^{\perp}$ 上是强制的.

有了以上 3 个引理就可以给出问题 (4) 解的存在性.

定理 2 设 g 是一个 Caratheodory 函数, 满足条件 (5) 和 (LL) 条件, 则问题 (4) 至少有一个解.

证明 由引理 1~3 可知 f 满足鞍点定理 (文献 [9] 定理 4.7) 条件, 故 f 有一个临界点 u_0 . 事实上, 令 $w_0 = -s_0 \varphi_1, w_1 = +s_0 \varphi_1, \Gamma$ 是包含所有形如 $h: [0, 1] \rightarrow H^1_0(\Omega)$ 的连续映射, 使得 $h(0) = w_0, h(1) = w_1$, 则临界值 $f(u_0) = \inf_{h \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} f(h(t)) \geq \beta = \inf_{v \in V} f(v)$.

2 多解性

下面给出问题 (1) 非平凡解的多重性结论.

定理 1 的证明 由定理 2 可知 f 有一个山路型的临界点 u_0 , 令 $c_0 = f(u_0)$. 利用式 (7) 可得

$$f'(u \bowtie w, v) = \int_{\Omega} A \nabla w \cdot \nabla v dx - \lambda_1 \int_{\Omega} w v dx - \int_{\Omega} g'(u) w v dx \quad \forall u, v, w \in H^1_0(\Omega) \quad (9)$$

由式 (9) 可知 $f'(0 \bowtie w, v) = \int_{\Omega} A \nabla w \cdot \nabla v dx - \lambda_1 \int_{\Omega} w v dx - \int_{\Omega} g'(0) w v dx$. 但 $\lambda_1 + g'(0)$ 不是问题 (2) 的特征值, 所以 $f'(0 \bowtie w, v) \neq 0$, 故 0 是 f 的非退化临界点. 如果 $g'(0) < 0$, 对于 $v \neq 0, f'(0 \bowtie v, v) = \int_{\Omega} A \nabla v \cdot \nabla v dx - \lambda_1 \int_{\Omega} v^2 dx - \int_{\Omega} g'(0) v^2 dx = \|v\|^2 - (\lambda_1 + g'(0)) \int_{\Omega} v^2 dx > -g'(0) \int_{\Omega} v^2 dx > 0$. 因此算子 $f'(0)$ 是正定的, ρ 的 Morse 指标是 0. 如果 $\exists m \geq 2$ 使得 $\lambda_m < \lambda_1 + g'(0) < \lambda_{m+1}$, 令 $Y = \text{span}_{k \leq m} \{\varphi_k\}$ 其中 φ_k 是 λ_k 对应的特征函数, 则对于 $\forall 0 \neq v \in Y$ 有 $f'(0 \bowtie v, v) \leq (\lambda_2 - (\lambda_1 + g'(0))) \int_{\Omega} v^2 dx < 0$. 因为 $m \geq 2$, 所以 $f'(0)$ 至少有 2 个负特征值. 因此 0 的 Morse 指标至少为 2. 如果 u_0 是 f 对应于 c_0 唯一的临界点, 且 u_0 是非退化的, 则由文献 [3] 中的定理 4.2 可知 u_0 的 Morse 指标必定是 1. 因此 f 必有一个临界点 $u_0 \in f^{-1}(c_0), u_0 \neq 0$. 下面

证明 f 还有另一个不同于 $0, u_0$ 的临界点.

定义连续映射 $N: H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ 为 $Nu, v = \int_{\Omega} (\lambda_1 u + g(u))v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)$, 这里 $\cdot, \cdot$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 的内积, 则 N 是紧的, 并且 $f'(u)v = \langle u, v \rangle - Nu, v$, 即 $f' = I - N$. 类似地, 可以定义另一个映射 $T: H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, $Tu, v = \int_{\Omega} \left(\lambda_1 + \frac{\gamma}{2} \right) uv dx, \forall v \in H_0^1(\Omega)$. 下面计算 $\deg_{LS}(I - N, B_R, 0)$, 其中 B_R 是 $H_0^1(\Omega)$ 中以 0 为圆心 R 为半径的球.

如果 $Tu = \lambda u, \exists R, u \neq 0$, 通过计算可知 $\frac{\lambda_1 + \frac{\gamma}{2}}{\lambda}$ 是式(2)的特征值. 因此 $\exists k$, 使得 $\lambda_k = \frac{\lambda_1 + \frac{\gamma}{2}}{\lambda}$. 又因为 $\lambda_1 \leq \lambda_1 + \frac{\gamma}{2} \leq \lambda_2$, 所以 T 仅有一个特征值严格大于 1 . 因此 $\deg_{LS}(I - T, B_R, 0) = -1$. 考虑下面半线性问题 ($t \in [0, 1]$):

$$\begin{cases} Lu + \left(\lambda_1 + \frac{\gamma}{2} \right) u = 0 & (x \in \Omega) \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} Lu + \left(\lambda_1 + \frac{\gamma}{2} \right) u + t \left(g(u) - \frac{\gamma}{2} u \right) = 0 & (x \in \Omega) \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \quad (11)$$

显然问题(11)是问题(1)~(10)的同伦问题. 由 Leray-Schauder 度的同伦不变性, 可知只需要验证问题(11)的解有先验估计不依赖于参数 t , 即可说明对于足够大的 R , 有 $\deg_{LS}(I - N, B_R, 0) = \deg_{LS}(I - T, B_R, 0)$. 令 $A: L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ 是算子 $-L - \left(\lambda_1 + \frac{\gamma}{2} \right): H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ 的有界逆算子. 因此 u 是问题(11)对应于 t 的解当且仅当 $u - tA \left(g(u) - \frac{\gamma}{2} u \right) = 0$. 显然, 如果 $v \in L^2(\Omega)$ 是 $u - t \left(g(Av) - \frac{\gamma}{2} Av \right) = 0$ 的一个解, 则 $Av = u$ 是前式的一个解. 又因为 A 是有界算子, 作为文献[10]中定理1证明中先验估计的特例, 可知此式的解是有界的^[11]. 因此 $\exists R$, 使得问题(11)的解 $u \in B_R - \partial B_R$. 由此可知 $\deg_{LS}(I - N, B_R, 0) = -1$.

另一方面 $f' = I - N$ 在 0 点的局部度数可以通过计算 $I - N'(0)$ 在 0 点附近 (比如 B_{ϵ}, ϵ 足够小) 的 LS 度得到. 这里 $N'(u)$ 定义为 $N'(u)w, v = \int_{\Omega} (\lambda_1 + g'(u))wv dx, \forall u, v, w \in H_0^1(\Omega)$. 因此可得 $\text{Index}_{LS}(I - N, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \deg(I - N'(0), B_{\epsilon}, 0)$. 反设 0 和 u_0 是 f 仅有的临界点, 则 u_0 是 f 的孤立临界点, 由文献[4]的结果可知 $\text{Index}_{LS}(I - N, u_0) = -1$. 如果对于足够大的 $R > 0$ 使得 $u_0 \in B_R$, 由 LS 度的性质可知 $\deg_{LS}(I - N, B_R, 0) = \text{Index}_{LS}(I - N, 0) + \text{Index}_{LS}(I - N, u_0)$. 所以 $\text{Index}_{LS}(I - N, 0) = 0$. 下面利用此式来导出矛盾. 容易验证, $\exists \lambda \in \mathbf{R}^1, u \neq 0$ 使得 $N'(0)u = \lambda u$ 当且仅当 $\frac{\lambda_1 + g'(0)}{\lambda}$ 是问题(2)的特征值. 如果 $g'(0) < 0$, 由 $\frac{\lambda_1 + g'(0)}{\lambda} = \lambda_k$ 推出 $\lambda < 1$. 因此 $N'(0)$ 所有特征值都严格小于 1 . 由 LS 度性质可知 $\text{Index}_{LS}(I - N, 0) = (-1)^j = 1$. 如果 $\exists m \geq 2$ 使得 $\lambda_m < \lambda_1 + g'(0) < \lambda_{m+1}$, 则 $\lambda = \frac{\lambda_1 + g'(0)}{\lambda_k} > 1, k \leq m$. $N'(0)$ 有 m 个特征值大于 1 , 因此 $\text{Index}_{LS}(I - N, 0) = (-1)^m \neq 0$. 无论哪一种情况, 都与 $\text{Index}_{LS}(I - N, 0) = 0$ 矛盾. 证毕.

参考文献:

- [1] SU Jia-bao, ZHAO Lei-ga. An elliptic resonance problem with multiple solutions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 319: 604-616.
- [2] LANDESMAN E, ROBINSON S, RUMBOS A. Multiple solutions of semilinear elliptic problems at resonance[J]. Nonlinear Analysis, 1995, 24: 1049-1059.
- [3] AHMAD S. Multiple nontrivial solutions of resonant and nonresonant asymptotically linear problems[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1986, 96: 405-409.

[4] AMBROSETTI A. Equadiff 82 :Proceedings of the International Conference Held in Würzburg ,FRG ,August 23-28 ,1982[C]. Berlin : Springer ,1983.

[5] HOFER H. A note on the topological degree at a critical point of mountain pass type[J]. Proceedings of the American Mathematical Society ,1984 ,90 :309-315.

[6] GARZA G L ,RUMBOS A. Multiple solutions for resonant semilinear elliptic problems in $\mathbf{R}^N$ [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications ,2005 ,305 :367-379.

[7] RUDIN W. Functional analysis[M]. Columbus :McGraw-Hill Companies ,1991.

[8] 钟承奎,范先令.非线性泛函分析引论[M].兰州 :兰州大学出版社 ,1998.

[9] MAWHIN J ,WILLEM M. Critical point theory and hamitonian systems[M]. New York :Springer-Verlag ,1989.

[10] RUMBOS A. A semilinear elliptic boundary value problem at resonance where the nonlinearity may grow linearly[J]. Nonlinear Analysis ,1991 ,16 :1159-1168.

[11] IAlA J A. A priori estimates for a similinear elliptic PDE[J]. Nonlinear Analysis ,1995 ,24 :1039-1048.

Multiple solutions to a semilinear elliptic boundary value problem

CAI Hong-rui , AN Tian-qing

(College of Science , Hohai University , Nanjing 210098 , China)

Abstract : Multiple solutions to a semilinear elliptic boundary value problem were discussed using the critical point and the theories of topological degree. It was concluded that there are three solutions under suitable conditions.

Key words : saddle theorem ; Landesman-Lazer condition ; topological degree ; Morse index

+++++

《水利经济》征订启事

中国科技核心期刊 全国水利系统优秀期刊 全国农业系统优秀期刊

(邮发代号 28-252 ,CN32-1165/F ,双月刊)

《水利经济》是由河海大学与中国水利经济研究会共同主办的以技术性为主、兼顾学术性和管理性的科技期刊。《水利经济》1983 年创刊 ,是全国唯一的水利经济研究方面的专业性期刊。

主要刊登内容 :水利经济学理论 ;水利工程建设中的经济效益、社会效益和环境效益评价与分析 ;水利工程经济评价和财务评价 ,以及水利工程资本运作与费用分摊研究 ;水利工程管理研究 ,以及水利事业和水利建设的管理体制改革研究 ;水库移民经济研究 ;农业经济研究 ;生态与环境经济研究 ;生态建设领域中的水资源可持续发展研究等。

主要读者对象 :从事水利经济、水利水电技术、经济管理、生态、环境、农业经济及管理工作的有关工程技术人员、科研人员、管理人员以及高等院校师生。

订阅办法 :读者可通过邮局订阅 ,也可直接向编辑部订阅。每期定价 6 元 ,全年 6 期共计 36 元。

编辑部地址 :210098 南京市西康路 1 号 河海大学《水利经济》编辑部

联系电话(传真) 025-83786350

E-mail :jj@hhu.edu.cn

http ://kkb.hhu.edu.cn/index_jj.htm