

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2009.06.022

通量与源项和谐的一维浅水方程离散方法

向小华 ,吴晓玲 ,王船海

(河海大学水文水资源学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :针对采用常规齐次浅水方程的解法求解非齐次浅水方程时 ,源项与通量不具有“ 和谐性 ”的缺点 ,提出采用 van Leer 通量计算模式处理通量 ,采用迎风特征分解处理源项 ,使得通量和源项具有相同的离散方式 ,构建了一种具有“ 和谐性 ”的数值方法 ,并对“ 和谐性 ”给出了详细的证明 .由于“ 和谐性 ”并不能保证结果的高精度 ,引入满足 TVD 条件的通量限制器 ,提高了计算结果的精度和稳定性 .2 个标准算例验证表明 ,该数值方法具有“ 和谐性 ”、稳定性以及高精度特性 .

关键词 :和谐格式 ;通量限制 ;迎风法 ;特征分解 ;浅水方程

中图分类号 :TV133 **文献标识码 :**A **文章编号 :**1000-1980(2009)06-0721-06

现代气体力学中的许多高精度计算方法已被移植到水流计算中 ,取得了显著的效果 ,如 Glaister^[1]将 Roe 近似黎曼解应用于浅水方程模拟 ;Alerudo 等^[2]采用高分辨率的 Godunov 格式求解二维浅水方程 ;Toro^[3]提出加权平均格式 ,并将其应用于浅水方程的求解 .上述方法大多基于齐次浅水方程 ,然而完整的浅水方程含有底坡、河宽、糙率等组成的源项 ,采用齐次浅水方程的解法不能保证通量和源项在特定情况下的平衡 ,比如在静水或者设定的特殊情况下数值离散的通量应该与源项精确平衡 ,不应该出现虚假流动 ,国内学者称这种性质为通量和源项的“ 和谐性 ”.为了保证通量和源项的“ 和谐性 ”,Smolarkiewicz 等^[4]采用 MPDATA 方法处理源项 ,Nazquez-Cendon 等^[5]采用迎风法分解源项 ,Hubbard 等^[6-7]采用特征分解法分解源项 ,Zhou 等^[8-9]采用水位梯度法等分解源项 .

本文对文献 [5] 提出的方法进行改进 ,其中采用 van Leer 方法离散齐次项 ,采用迎风法处理与底坡、河道断面以及糙率相关的源项 ,对迎风法的低精度采用通量限制器修正 ,提高了计算的精度和稳定性 ,并详细证明了该改进方法(以下简称本文方法)的“ 和谐性 ”,通过几个算例证明了本文方法的优点 .

1 基本方程

一维带源项的变宽矩形断面河道的浅水方程为

$$U_t + F(U)_x = S$$

其中

$$U = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix} \quad F(U) = \begin{bmatrix} q \\ q^2/h + gh^2/2 \end{bmatrix}$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ ghH' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -qb'/b \\ -q^2b'/(hb) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -ghn^2u|u|R^{-4/3} \end{bmatrix}$$

式中 : h ——水深 ; u ——水流流速 ; $q = hu$ ——单宽流量 ; g ——重力加速度 ; H ——底坡相关的量 ,表示河床到固定基面的距离 ; b ——河宽 ; n ——糙率 ; R ——水力半径 .如图 1 所示 .

2 数值方法

离散控制体示意图如图 2 所示 ,单元控制体长度 $\Delta x_i = A_{iL} + A_{iR} = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = \Delta x_i$.为方便计 ,这里假

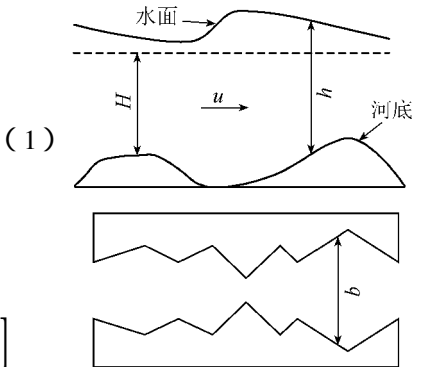


图 1 河道地形示意图
Fig. 1 River topography

收稿日期 :2008-09-25
基金项目 :“ 十一五 ”国家科技支撑计划(2006BAC05B02)
作者简介 :向小华(1981 —)男 ,湖北松滋人 ,讲师 ,博士研究生 ,主要从事计算水力学研究 .

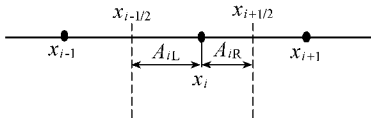


图2 控制体单元

Fig. 2 Control volume cell

设控制体网格均匀,非均匀网格有类似的推导过程.采用欧拉法对时间积分,高斯公式对空间积分,得出方程(1)的积分形式:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*}{\Delta x} = S_i^* \quad (2)$$

式中: U_i^{n+1} 与 U_i^n ——控制体内两时刻的平均值; $F_{i+1/2}^*$ 与 $F_{i-1/2}^*$ ——过界面 $x_{i-1/2}$ 与 $x_{i+1/2}$ 的通量值; S_i^* ——源项在控制体内的平均值,表示为

$$S_i^* = \left(\int_{\Delta x_i} S_i dx \right) / \Delta x.$$

2.1 界面通量

采用界面两侧节点计算通量的“Q类”方法^[5]通用形式为

$$F_{i+1/2}^* = (F_i + F_{i+1})/2 - |Q_{i+1/2}|(U_{i+1} - U_i)/2 \quad (3)$$

式中: F_i 与 F_{i+1} ——界面两侧控制体节点的通量; $Q_{i+1/2}$ ——相应的特征矩阵,本文采用 van Leer 的方法^[10]定义该特征矩阵 $Q_{i+1/2} = A[(U_i + U_{i+1})/2]$,其中 A 为雅可比矩阵,定义为 $A = \partial F / \partial U$.

2.2 迎风源项

为了保证源项与通量的和谐,可以将源项按 Q 矩阵的右特征向量分解^[5],定义 Λ 为特征矩阵 Q 的特征值组成的对角阵,即 $\Lambda_{ij} = \lambda_i$, λ_i 为第 i 个特征值; $|\Lambda|$ 为 Λ 的绝对值矩阵,即每个元素都取绝对值,由此可以定义以下关系式:

$$\begin{cases} \Lambda^+ = (\Lambda + |\Lambda|)/2 & \Lambda^- = (\Lambda - |\Lambda|)/2 & Q = X\Lambda X^{-1} \\ Q^{-1} = X\Lambda^{-1}X^{-1} & |Q| = X|\Lambda|X^{-1} \end{cases} \quad (4)$$

式中 X 为 Q 右特征向量构成的矩阵.将源项 S 对 X 特征分解,即

$$S = X\sigma = X\Lambda\Lambda^{-1}\sigma = X\Lambda^+\Lambda^{-1}\sigma + X\Lambda^-\Lambda^{-1}\sigma \quad (5)$$

结合式(4)(5)并进行一系列的变换,可得

$$S_{ik} = S_{ikL} + S_{ikR} = \frac{1}{2}[(I + Q^{-1}|Q|)S_k]_{i-1/2} + \frac{1}{2}[(I - Q^{-1}|Q|)S_k]_{i+1/2} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (6)$$

式中: I ——单位阵; σ ——分解系数.式(6)的源项分解结果具有式(3)类似的迎风性质^[5],两者都采用相同的离散模式才能保证最终结果的“和谐性”.下面给出和谐性的详细证明.

2.3 “和谐性”证明

Greenberg 等^[11]首次提出了双曲守恒率方程组中通量与源项“和谐”的方法,而后有许多学者遵循该方法建立了“和谐”的离散格式.但这些格式^[6-7]大多是基于 $h = H$, $q = 0$ 这一稳定状态构建的.对于式(1)的浅水方程,以上假设的状态导致 $S_2 = S_3 = 0$,不能完善地考虑宽度变化以及糙率造成的影响. Elena 等^[5]提出了另外一种稳定状态:

$$h = \bar{h} \quad q = k\bar{h}/b \quad (7)$$

式中 $\bar{h}$, k 均为常数.

定义^[5](a)采用某种算法离散方程(1),如果式(7)能精确地满足该离散方程,则称这种算法满足精确“和谐性”;(b)采用某种算法离散方程(1),如果式(7)使该离散方程左右两端差值具有 $O(\Delta x^2)$ 阶误差,则称这种算法满足近似“和谐性”.

证明:将式(7)的定义代入式(1)的动量方程后在 (x, x_f) 上积分,得到关于底坡 H 相关的函数:

$$H = H_f + \frac{k^2}{2g} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b_f^2} \right] + n^2 R^{-4/3} k |k| \int_{x_f}^x \frac{1}{b^2} dx \quad (8)$$

对于式(1),有如下一些特征量:

雅可比矩阵

$$A = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (9)$$

特征向量矩阵

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u + c & u - c \end{bmatrix} \quad (10)$$

特征值

$$\lambda_1 = u + c \quad \lambda_2 = u - c \quad (11)$$

其中

$$c = \sqrt{gh}$$

结合 Q 与 A 的关系以及式 (4)(11),有以下关于 Q 的表达式:

$$\begin{cases} |Q| = \frac{1}{\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_2 |\tilde{\lambda}_1| - \tilde{\lambda}_1 |\tilde{\lambda}_2| & |\tilde{\lambda}_2| - |\tilde{\lambda}_1| \\ \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 (|\tilde{\lambda}_1| - |\tilde{\lambda}_2|) & \tilde{\lambda}_2 |\tilde{\lambda}_2| - \tilde{\lambda}_1 |\tilde{\lambda}_1| \end{bmatrix} \\ |Q|Q^{-1} = \frac{1}{(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1)\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_2^2 |\tilde{\lambda}_1| - \tilde{\lambda}_1^2 |\tilde{\lambda}_2| & |\tilde{\lambda}_2| - |\tilde{\lambda}_1| \\ \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2^2 |\tilde{\lambda}_1| - \tilde{\lambda}_1^2 \tilde{\lambda}_2 |\tilde{\lambda}_2| & \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 (|\tilde{\lambda}_2| - |\tilde{\lambda}_1|) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (12)$$

其中标识符 $\sim$ 表示采用 van Leer 方法的计算值,且

$$\tilde{u}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}) \quad \tilde{c}_{i+1/2} = \sqrt{\frac{1}{2}g(h_i + h_{i+1})}$$

以下证明以缓流为例,临界流和急流有相同的结论.缓流时,有 $\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 < 0$.

在 n 时刻假设解满足式 (7) 的稳定状态,即

$$\begin{cases} h_i^n = \bar{h} & q_i^n = k\bar{h}/b_i & \forall i \\ H_i = H_{i-1} + \frac{k^2}{2g} \left(\frac{1}{b_i^2} - \frac{1}{b_{i-1}^2} \right) + n^2 R^{-4/3} k |k| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{b^2} ds \end{cases} \quad (13)$$

式 (3) 和式 (6) 的离散方式都具有迎风性质,将式 (2) 中的表达式分别代入式 (3) 计算通量 F 各分量,代入式 (6) 计算源项,在 $n+1$ 时刻得到如下离散式:

$$(F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*)_h = \frac{1}{2}k\bar{h} \left(\frac{1}{b_{i+1}} - \frac{1}{b_{i-1}} \right) - \frac{1}{4g}k^2\sqrt{g\bar{h}} \left(\frac{1}{b_{i+1}^2} - \frac{2}{b_i^2} + \frac{1}{b_{i-1}^2} \right) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^*)_q &= \frac{1}{2}k^2\bar{h} \left(\frac{1}{b_{i+1}^2} - \frac{1}{b_{i-1}^2} \right) - \frac{1}{2}k\bar{h}\sqrt{g\bar{h}} \left(\frac{1}{b_{i+1}} - \frac{2}{b_i} + \frac{1}{b_{i-1}} \right) - \\ &\frac{1}{8g}k^3\sqrt{g\bar{h}} \left[\left(\frac{1}{b_i} + \frac{1}{b_{i+1}} \right) \left(\frac{1}{b_{i+1}^2} - \frac{1}{b_i^2} \right) - \left(\frac{1}{b_{i-1}} + \frac{1}{b_i} \right) \left(\frac{1}{b_i^2} - \frac{1}{b_{i-1}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$(S_{i1})_h = -\frac{1}{4g}k^2\sqrt{g\bar{h}} \left(\frac{1}{b_{i+1}^2} - \frac{2}{b_i^2} + \frac{1}{b_{i-1}^2} \right) + f_{1h}(b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, n) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (S_{i1})_q &= \frac{1}{4}k^2\bar{h} \left(\frac{1}{b_{i+1}^2} - \frac{1}{b_{i-1}^2} \right) + f_{1q}(b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, n) - \\ &\frac{1}{8g}k^3\sqrt{g\bar{h}} \left[\left(\frac{1}{b_i} + \frac{1}{b_{i+1}} \right) \left(\frac{1}{b_{i+1}^2} - \frac{1}{b_i^2} \right) - \left(\frac{1}{b_{i-1}} + \frac{1}{b_i} \right) \left(\frac{1}{b_i^2} - \frac{1}{b_{i-1}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$(S_{i2})_h = \frac{1}{2}k\bar{h} \left(\frac{1}{b_{i+1}} - \frac{1}{b_{i-1}} \right) \quad (18)$$

$$(S_{i2})_q = \frac{1}{4}k^2\bar{h} \left(\frac{1}{b_{i+1}^2} - \frac{1}{b_{i-1}^2} \right) - \frac{1}{2}k\bar{h}\sqrt{g\bar{h}} \left(\frac{1}{b_{i+1}} - \frac{2}{b_i} + \frac{1}{b_{i-1}} \right) \quad (19)$$

$$(S_{i3})_h = -f_{3h}(b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, n) \quad (20)$$

$$(S_{i3})_q = -f_{3q}(b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, n) \quad (21)$$

其中下标 h, q 分别表示连续方程和动量方程的离散.容易验证,当采用 van Leer 平均时,式 (16)(17) 中的 f_1 与式 (20)(21) 中的 f_3 精确相等.将式 (14)(16)(18)(20) 代入式 (1) 中的连续方程,将 (15)(17)(19), (21) 代入式 (1) 中的动量方程,可以验证方程成立,证明本文方法满足精确“和谐性”.

2.4 通量限制器

本文方法虽然保证“和谐性”,但由于方法为一阶迎风法,所以具有较强的耗散性.可以采用通量限制^[12]方法提高计算结果的精度,使得本文所述的界面通量保持 TVD 性,确保方法在光滑区有二阶以上精度,并在大梯度处不产生虚假振荡.在通量限制器下,方程 (3) 以及方程 (6) 变为^[6]

$$\begin{cases} F_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2}(X|\Lambda|LX^{-1})_{i+1/2}(U_{i+1} - U_i) \\ S_{ik} = S_{ikL} + S_{ikR} = \frac{1}{2}[(I + |Q|XA^{-1}LX^{-1})S_k]_{i-1/2} + \frac{1}{2}[(I - |Q|XA^{-1}LX^{-1})S_k]_{i+1/2} \end{cases} \quad (22)$$

其中
$$L = \text{diag}[1 - L(r_k)(1 - |\nu_k|)] \quad \nu_k = \frac{\tilde{\lambda}_k \Delta t}{\Delta x}$$

式中： L ——非线性的通量限制器矩阵，为对角矩阵； $L(r_k)$ ——非线性的通量限制器，其值与间断比率 r_k 有关， $r_k = \tilde{\alpha}_{k1}/\tilde{\alpha}_{k2}$ ， $\tilde{\alpha}_{k1}$ 为界面 k 迎风界面两侧的间断值， $\tilde{\alpha}_{k2}$ 为界面 k 两侧的间断值，本文采用稳定性与分辨率俱佳的 superbee 限制器：

$$L(r_k) = \max[0, \min(2r_k, 1), \min(r_k, 2)] \tag{23}$$

式 (22) 为本文所得出的求解浅水方程 (1) 的最终离散表达式。

3 算例

式 (22) 着重构建一种保持通量和源项“和谐”的离散格式，这种格式应保证至少在静水条件下或特定条件下通量和源项的精确平衡，而这种验证目前只能通过一些标准的算例来验证，实际河道中难以得到这样的平衡算例。以下通过对 2 个通用的算例来验证本文方法具有较好的“和谐性”以及较高的精度。

3.1 动态平衡算例

文献 [5] 设计了一种测试算例，该算例具有理论解，在特定条件下能保持水位不变而流速具有较大变化。该算例河道地形见图 3。河道长 1500 m，取空间步长 $\Delta x = 0.5$ m，Courant 数为 0.9。初始条件和边界条件分别给定如下：

初始条件为

$$\begin{cases} H(0) = 16 \text{ m} \\ L = 1500 \text{ m} \\ H(x) = H(0) - z_b \\ h(x, 0) = H(x) \\ q(x, 0) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

其中 z_b 为底高。

边界条件为

$$\begin{cases} h(0, t) = H(0) + 4 + 4\sin\left(\pi\left(\frac{4t}{86400} - \frac{1}{2}\right)\right) \\ q(L, t) = 0 \end{cases} \tag{25}$$

文献 [5] 给出了该条件下的渐进理论解：

$$\begin{cases} h(x, t) = H(x) + 4 + 4\sin\left(\pi\left(\frac{4t}{86400} - \frac{1}{2}\right)\right) \\ q(x, t) = \frac{1}{b} \left[\frac{16\pi}{86400} \sin\left(\frac{4\pi t}{86400}\right) \int_x^L b \, ds \right] \end{cases} \tag{26}$$

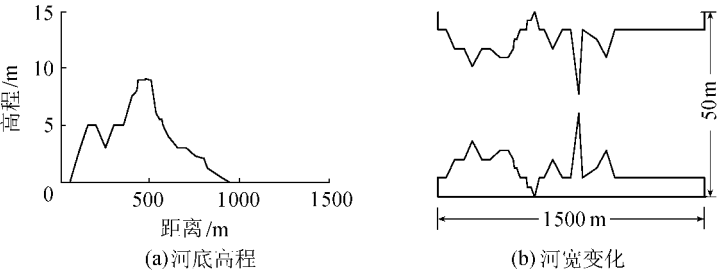


图 3 河底高程与河宽

Fig. 3 Riverbed elevation and river width

采用本文方法，在 $t = 10800$ s， $n = 0.1$ 时的数值解与渐进精确解的对比见图 4。图 4 结果表明采用迎风法离散源项和通量能够保持结果的和谐性和较高的精度。

3.2 微扰动算例

计算区域长 1 m，为了减小扰动传播的速度，这里将重力加速度 g 取为 1.0 m/s^2 。初始值 $h(x, 0) = 1.0 \text{ m}$ ，

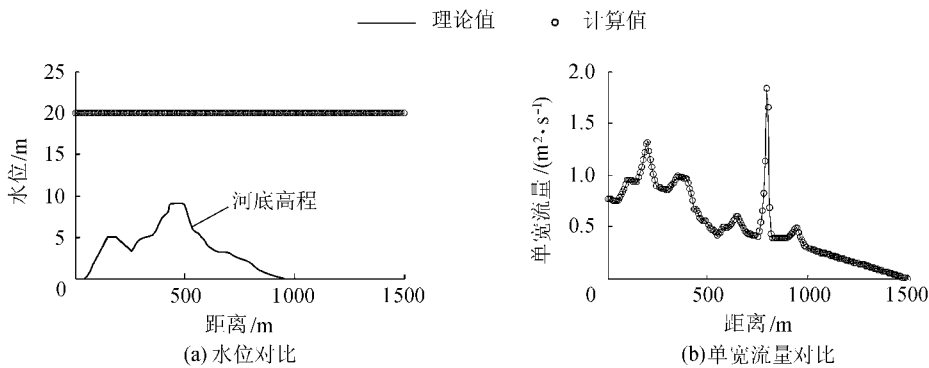


图 4 理论与计算水位、单宽流量对比 (t = 10800 s)

Fig. 4 Comparison between theoretical and calculated water levels and discharges (t = 10800 s)

$u = 0.0 \text{ m/s}$,边界条件为自由边界条件 ,河底高程定义如下 :

$$z_b = \begin{cases} 0.2 \cos 10 \pi (x - 0.5) + 1 & |x - 0.5| < 0.1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (27)$$

满足式 (27) 时 ,水体应为静态 .现对初始条件加以影响 ,给出一小的扰动如下 : $h(x) = 1.0 + \epsilon$, $0.1 < x < 0.2$.此时应有相对特征波速 $\pm \sqrt{ge}$ 分别向左右传播 ,在 Courant 数为 0.9 时 ,采用 2.4 节限制器修正后的方法在 3000 个控制体下的计算值与文献 [6] 中的精确值相同 ,认为该值可以作为对比时的精确解 .在 $\epsilon = 0.2$, $\epsilon = 0.01$ 两种扰动条件下 ,取 200 个控制体 , $t = 0.7 \text{ s}$ 时本文方法中有通量限制修正和无通量限制修正时的计算结果与文献 [6] 的值对比见图 5 .图 5 的结果表明加入通量限制后的方法有效地减小了数值耗散 ,并能够有效地模拟间断 ,提高了计算精度 .

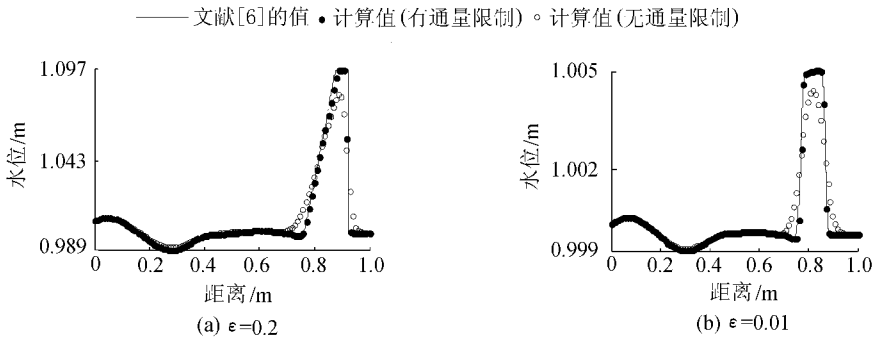


图 5 水位对比 (t = 0.7 s)

Fig. 5 Comparison among water levels by various methods (t = 0.7 s)

4 结 语

采用 van Leer 方法离散通量 ,迎风特征分解离散源项 ,使得离散结果保持了通量与源项的“和谐性” .在“和谐”离散方法的基础上 ,引入满足 TVD 特性的通量限制器 ,提高了结果的精度 ,保持了计算过程的稳定性 .验证的 2 个算例表明本文方法在保持结果“和谐”和提高计算精度上具有良好的表现 ,说明所探讨的方法是切实有效的 .

参考文献 :

[1] GLAISTER P. Approximate Riemann solutions of the shallow water equations[J]. Journal of Hydraulic Research , 1988 , 26(3) : 293-306 .
[2] ALCRUDE F , GARCIA-NAVARRO P. A high-resolution Godunov-type scheme in finite volumes for the 2D shallow-water equations[J]. Int J Numer Methods Fluids , 1993 , 16 : 489-505 .
[3] TORO E F. Shock-capturing methods for free-surface shallow flows[M]. Chichester : John Wiley & Sons , 2001 : 199-205 .
[4] SMOLARKIEWICZ P K , MARGOLIN L G. MPDATA : a finite-difference solver for geophysical flow[J]. Journal of Computational Physics , 1998 , 140 : 459-480 .

- [5] VAZQUEZ-CENDON M E. Improved treatment of source terms in upwind schemes for shallow-water equation in channels with irregular geometry[J]. *Journal of Computational Physics* , 1999 , 148 :497-526.
- [6] HUBBART M E , GARCIA-NAVARRO P. Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients[J]. *Journal of Computational Physics* , 2000 , 165 :89-125.
- [7] 王志力 耿艳芬 金生. 带源项浅水方程的通量平衡离散[J]. *水科学进展* , 2005 , 16(3) :373-379.(WANG Zhi-li , GENG Yan-fen , JIN Sheng. Flux balance method for shallow water equation with source terms[J]. *Advances in Water Science* , 2005 , 16(3) :373-379.(in Chinese))
- [8] ZHOU J G , CAUSON D M , MINGHAM C G , et al. The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations[J]. *Journal of Computational Physics* , 2001 , 168 :1-25.
- [9] 潘存鸿 林炳尧 毛献众. 一维浅水流动方程的 Godunov 格式求解[J]. *水科学进展* , 2003 , 14(4) :430-436.(PAN Cun-hong , LIN Bing-yao , MAO Xian-zhong. A Godunov-type scheme for 1-D shallow-water flow with uneven bottom[J]. *Advances in Water Science* , 2003 , 14(4) :430-436.(in Chinese))
- [10] HARTEN A , LAX P D , VAN LEER B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *SIAM Rev* , 1983 , 25 :35-61.
- [11] GREENBERG J M , LEROUX A Y. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations[J]. *SIAM J Numer Anal* , 1996 , 33 :1-16.
- [12] LEVEQUE R J. Numerical methods for conservation laws : lectures in mathematics[M]. Zurich , Schweiz :Birkhauser Verlag , 1992.

Well-balanced discrete method for determining flux and source terms in 1-D shallow water equations

XIANG Xiao-hua , WU Xiao-ling , WANG Chuan-hai

(*College of Hydrology and Water Resources , Hohai University , Nanjing 210098 , China*)

Abstract : In consideration of the defect of imbalance of flux and source terms during application of the homogeneous shallow water equations to the solution to the nonhomogeneous shallow water equations , the idea of maintaining balance is put forward . The van Leer method was employed for the flux term and upwind characteristic decomposing for the source term so as to realize the same discrete mode for the flux and source terms . Thus , a balanced numerical method was established . The balance this method was verified . Since the balance could not ensure high accuracy , a flux limiter satisfying the TVD conditions was introduced in order to raise the accuracy and steadiness of the calculated results . The verification of two benchmark problems indicates that the proposed numerical method is well balanced and has high accuracy and steadiness .

Key words : well-balanced scheme ; flux-limit scheme ; upwind scheme ; characteristic decomposing ; shallow water equation