

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2010.01.014

一种新的圆形过水断面正常水深近似计算公式

赵延风^{1,2},祝晗英³,王正中^{1,2}

(1.西北农林科技大学水利与建筑工程学院,陕西 杨凌 712100;
2.西北农林科技大学工程安全与病害防治研究中心,陕西 杨凌 712100;
3. 西安市水务局渭产河管理中心,陕西 西安 710015)

摘要:为了给工程设计提供更为简捷、通用且有较高精度的圆形过水断面正常水深的计算公式,首先引入无量纲正常水深参数并对圆形过水断面正常水深的基本方程进行恒等变形,然后根据优化拟合原理对恒等变形公式进行分析处理,从而导出了一种新的圆形过水断面水深近似计算公式.误差分析及实例计算结果表明,该近似计算公式形式简单,适用范围广,计算精度高,工程常用范围内其正常水深计算的最大相对误差小于 0.74%.

关键词:圆形过水断面 正常水深 计算公式

中图分类号:TV131.4 文献标识码:A 文章编号:1000-1980(2010)01-0068-04

圆形过水断面正常水深的基本方程为超越函数,目前还无法求得其解析解,传统的求解方法主要是查图表法和试算法,但由于求解过程复杂而给工程设计人员带来不便.20 世纪 90 年代以来,国外在正常水深计算方面进行了深入研究^[1-6],但研究所涉及的过水断面大多为矩形、圆角矩形、梯形和抛物线等断面形式,圆形过水断面形式很少.国内在正常水深计算方面也进行了较多研究,提出了多种圆形过水断面正常水深的计算方法^[7-13].文献[7]提出了以圆心角为迭代值的迭代计算方法,但该方法迭代公式复杂,迭代初值带有随意性,至少需迭代 4 次才能达到工程要求的精度.文献[8]通过分析计算,提出了圆形过水断面无量纲正常水深近似等于有关参数 k 的 2 个函数乘积的计算公式,该计算公式用分段函数表示,不仅适用范围较广,而且计算精度较高.文献[9]提出了牛顿迭代法,该方法计算精度较高,不足之处是初值函数为一分段函数,且适用范围较小,迭代公式更为复杂.文献[10-13]也提出了几种圆形过水断面正常水深的计算公式,这些计算公式均存在形式复杂、适用范围小和精度低的缺点.本文首先对圆形过水断面均匀流方程进行了变换,然后根据优化拟合原理对圆形过水断面正常水深方程进行了处理,最后提出了一种集简捷、准确、通用于一体的圆形过水断面正常水深近似计算公式.

1 基本方程

圆形过水断面如图 1 所示.由文献[8]可知,圆形过水断面正常水深的方程可表示为

$$\frac{2^{2.6}}{d^{1.6}}\left(\frac{nQ}{i^{0.5}}\right)^{0.6} = \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^{0.4}}$$

(1)

式中: n ——圆形管道糙率; Q ——输水流量, m^3/s ; i ——管道比降; d ——圆形过水断面直径, m ; θ ——圆形断面正常水深时的圆心角, rad .

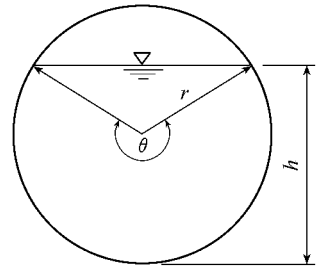


图 1 圆形过水断面
Fig. 1 Circular cross section

2 近似计算公式的推导

设

$$k = \frac{2^{2.6}}{d^{1.6}}\left(\frac{nQ}{i^{0.5}}\right)^{0.6}$$

(2)

$$x = \frac{h}{d}$$

(3)

式中： k ——已知量综合参数； x ——圆形过水断面无量纲正常水深； h ——正常水深，m。

在实际工程中,如果圆形过水断面的水深超过一定深度,则有可能产生淹没整个过水断面的现象即满流现象,或者出现圆管明流和圆管满流交替的水流特征.由文献[7]可知,为了完全避免圆形过水断面在输水过程中明流和满流交替发生的水流现象,对圆管上部未充水面积应有一定的要求,即净空面积应大于全断面面积的 15%,那么圆形过水断面所对应的圆心角 $\theta \leq 4.39 \text{ rad}$,相应的 $x < 0.8$. 由于 x 取值过小,会增大计算误差,因而文献[9,13]将 x 的取值确定在 0.05 以上.但是,实际工程中有时还需要计算小流量的正常水深,故本文将 x 的取值区间确定为 $[0.01, 0.80]$,对应的已知量综合参数 k 的取值区间为 $[0.015\ 3, 2.971\ 5]$. 根据确定的 x 的取值区间,通过优化处理,得出了无量纲正常水深 x 的一元二次方程,即

$$x^2 - 2.5169x + 0.605k^{0.75} = 0$$

(4)

由式(4)计算得到的 $k \sim x$ 曲线(称为近似曲线)与由式(1)~(3)计算得到的 $k \sim x$ 曲线(称为精确曲线)如图 2 所示.由图 2 可以看出,2 条曲线几乎完全重合.解一元二次方程式(4),得

$$x = 1.258 - (1.584 - 0.605k^{0.75})^{0.5}$$

(5)

将式(5)代入式(3)可得圆形过水断面正常水深的近似计算公式.

3 误差分析

圆形过水断面正常水深的近似计算公式已有多种,相对而言,文献[8]所提出的近似计算公式形式最简单,精度最高,适用范围最广.为了说明本文所提出的近似计算公式的优点,将本文公式与文献[8]公式进行比较,如表 1 所示.

表 1 2 种圆形过水断面正常水深近似计算公式最大相对误差比较

Table 1 Comparison of maximum relative errors of present approximate formula with those in Ref. [8] for circular cross section of normal depth

公式名称	公式形式	最大相对误差/%	
		$x \in [0.05, 0.80]$	$x \in [0.01, 0.05]$
文献[8]公式	$x = \begin{cases} 0.25k^{0.77} \times 1.087^k & k \in [0.015\ 3, 2.223\ 7] \\ 0.20k^{0.80} \times 1.187^k & k \in [2.223\ 7, 2.971\ 5] \end{cases}$	-0.900	0.125
本文公式	$x = 1.258 - (1.584 - 0.605k^{0.75})^{0.5} \quad k \in [0.015\ 3, 2.971\ 5]$	0.734	0.674

从表 1 可以看出 在 $x \in [0.01, 0.80]$ 范围内,即在对应的已知量综合参数 k 的取值区间 $[0.0153, 2.971\ 5]$ 范围内,文献[8]公式和本文公式都有较高的精度.在常用 $x \in [0.05, 0.80]$ 范围内,本文公式精度较高.在非常用 $x \in [0.01, 0.05]$ 范围内,文献[8]公式精度较高.在 $x \in [0.01, 0.80]$ 范围内,本文公式是一个通式表达式,而文献[8]公式是一个分段函数表达式,应用时还需通过该公式 k 值范围的判断,才能确定采用什么分段函数,过程略显复杂.总的来说,本文公式和文献[8]公式均具有形式简单、精度高、适用范围广的特点.

为了进一步说明本文公式的精度,将本文公式与文献[8,10-13]公式的相对误差进行了比较,如图 3 所示.

图 3 仅给出了相对误差不大于 2% 的数值.误差计算结果表明,在工程常用范围内,用本文公式计算圆形过水断面正常水深的最大相对误差小于 0.74%,文献[8,10-13]公式的最大相对误差依次为 $+\infty, -30.44\%, -18.54\%, -7.80\%, -0.90\%$.从图 3 可以看出,当精度要求小于 1%

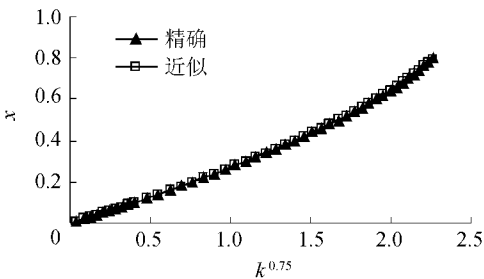


图 2 $k \sim x$ 曲线
Fig. 2 Comparison of calculated and exact values for k - x curves

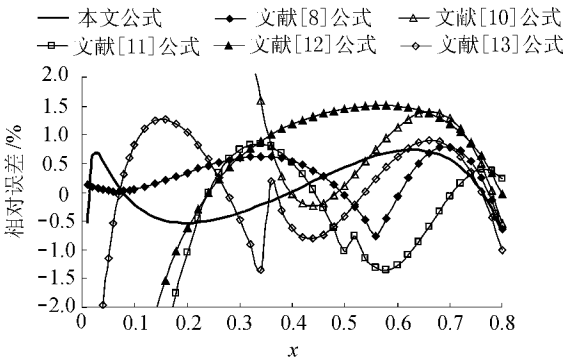


图 3 不同公式圆形过水断面
正常水深计算相对误差比较
Fig. 3 Comparison of relative errors of various formulae for circular cross section of normal depth

时,本文公式和文献[8]公式适用范围最广.

4 应用举例

某电站输水管道断面为圆形,已知断面底坡 $i = 0.001$,糙率 $n = 0.015$,断面直径 $d = 15\text{ m}$,试确定流量分别为 $Q_1 = 840.0\text{ m}^3/\text{s}$ 和 $Q_2 = 0.2\text{ m}^3/\text{s}$ 时的正常水深.

由式(2)可知,当 $Q_1 = 840.0\text{ m}^3/\text{s}$ 时, $k = \frac{2^{2.6}}{d^{1.6}} \left(\frac{nQ}{i^{0.5}} \right)^{0.6} = 2.891\,707$ 当 $Q_2 = 0.2\text{ m}^3/\text{s}$ 时, $k = \frac{2^{2.6}}{d^{1.6}} \left(\frac{nQ}{i^{0.5}} \right)^{0.6} = 0.019\,373$.

解法1 用文献[8]公式

$$h = \begin{cases} 0.25k^{0.77} \times 1.087^k d & k \in [0.0153, 2.223\,7) \\ 0.20k^{0.80} \times 1.187^k d & k \in [2.223\,7, 2.971\,5] \end{cases}$$

计算正常水深.当 $Q_1 = 840.0\text{ m}^3/\text{s}$ 时,由于 $k = 2.891\,707$,故用分段函数的后段,即 $h = 0.20k^{0.80} \times 1.187^k d = 11.516\,9\text{ m}$; 当 $Q_2 = 0.2\text{ m}^3/\text{s}$ 时,由于 $k = 0.019\,373$,故用分段函数的前段,即 $h = 0.25k^{0.77} \times 1.087^k d = 0.180\,3\text{ m}$.

解法2 用本文公式计算正常水深.当 $Q_1 = 840.0\text{ m}^3/\text{s}$ 时, $k = 2.891\,707$,则 $h = d [1.258 - (1.584 - 0.605k^{0.75})^{0.5}] = 11.484\,8\text{ m}$ 当 $Q_2 = 0.2\text{ m}^3/\text{s}$ 时, $k = 0.019\,373$,则 $h = d [1.258 - (1.584 - 0.605k^{0.75})^{0.5}] = 0.179\,6\text{ m}$.

为了说明本文公式具有更高的计算精度,表2列出了文献[8]公式和本文公式正常水深的计算值与精确公式正常水深的计算值的相对误差.由表2可以看出,文献[8]公式和本文公式计算精度都较高,都能满足工程设计要求,但本文公式计算精度更高.

表2 2种计算公式计算结果相对误差比较

Table 2 Comparison of relative errors of calculated results of approximate formula of present study with those from Ref. [8]

流量/ ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$)	k	正常水深计算值/ m			相对误差/%	
		文献[8]公式	本文公式	精确公式	文献[8]公式	本文公式
840.0	2.891 707	11.516 9	11.484 8	11.491 5	0.221	- 0.058
0.2	0.019 373	0.180 3	0.179 6	0.179 7	0.334	- 0.056

注:(a)精确公式为本文中的式(1);(b)相对误差 = $(h_{\text{近}} - h_{\text{精}})/h_{\text{精}}$, $h_{\text{近}}$ 和 $h_{\text{精}}$ 分别为近似公式和精确公式正常水深计算值,而近似公式是指文献[8]公式和本文公式.

5 结 语

本文首先利用引入的无量纲正常水深参数,对圆形过水断面正常水深的基本方程进行恒等变形,然后根据优化拟合原理进行处理,得到了一种新的圆形断面正常水深的近似计算公式,且进行了误差分析,并通过相对较大流量和小流量的实例计算,推荐了2种比较好的圆形断面正常水深的计算方法.分析表明,本文公式在工程常用范围内均可适用,而且计算精度较高,最大相对误差小于0.74%,公式形式相对较为简单.与文献[8]公式相比,本文公式省略了 k 值范围判断项,求解过程和表达形式都较为简单,而且具有更高的计算精度.

参考文献:

[1] WONG T S W. Exact solutions for normal depth problem[J]. Journal of Hydraulic Research, 2007, 45(4): 567-571.

[2] RAJESH S. Exact solutions for normal depth problem [J]. Journal of Hydraulic Research, 2006, 44(3): 427-428.

[3] SWAMEE P K, RATHIE P N. Exact solutions for normal depth problem [J]. Journal of Hydraulic Research, 2004, 42(5): 541-547.

[4] BABAAYAN K K. Dimensionless curves for normal-depth calculations in canal sections [J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2001, 127(6): 386-389.

[5] SWAMEE P K. Normal-depth equations for irrigation canals[J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 1994, 120(5): 942-948.

[6] SHIRLEY E D, LOPES V L. Normal - depth calculations in complex channel sections [J]. Journal of Irrigation and Drainage

- Engineering, 1991, 117(2) :220-232.
- [7] 吕宏兴,把多铎,宋松柏.无压流圆形过水断面水力计算的迭代法[J].长江科学院院报,2003,20(5) :15-17. (LV Hong-xing,BA Duo-duo,SONG Song-bai. Hydraulic calculation for free flow in circular section by iterative method[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2003,20(5) :15-17. (in Chinese))
- [8] 赵延风,芦琴,张宽地.圆形过水断面均匀流水深的近似计算公式[J].西北农林科技大学学报 :自然科学版,2008,36(5) :225-228. (ZHAO Yan-feng,LU Qin,ZHANG Kuan-di. An approximate formula for calculating water depth of uniform flow in circular cross section[J]. Journal of Northwest A & F University :Natural Science Edition, 2008,36(5) :225-228. (in Chinese))
- [9] 张宽地,吕宏兴,赵延风.明流条件下圆形隧洞正常水深与临界水深的直接计算[J].农业工程学报,2009,25(3) :1-5. ZHANG Kuan-Di, LV Hong-Xing, ZHAO Yan-Feng. Direct calculation for normal depth and critical depth of circular section tunnel under free flow[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering,2009,25(3) :1-5. (in Chinese))
- [10] 韩会玲,孟庆芝.非满流圆管均匀流水力计算的近似数值解法[J].给水排水,1994(10) :25-26. (HAN Hui-ling,MENG Qing-zhi. Approximate value solution in hydraulic calculation of uniform-flow in partly full circular pipe[J]. Water & Wastewater Engineering, 1994(10) :25-26. (in Chinese))
- [11] 陈水倮.排水管道纯公式水力计算[J].给水排水,1995(1) :16-17. (CHEN Shui-di. Hydraulic calculation of sewer pipeline by formulae[J]. Water & Wastewater Engineering,1995(1) :16-17. (in Chinese))
- [12] 王正中,冷畅俭,娄宗科.圆管均匀流水力计算近似公式[J].给水排水,1997(9) :27-29. (WANG Zheng-zhong, LENG Chang-jian,LOU Zong-ke. Approximate formulae for hydraulic calculation of uniform flow for pipes with circular section[J]. Water & Wastewater Engineering, 1997 (9) :27-29. (in Chinese))
- [13] 文辉,李凤玲,黄寿生.圆管明渠均匀流的新近似计算公式[J].人民黄河,2006,28(2) :67-68. (WEN Hui,LI Feng-ling, HUANG Shou-sheng. New approximate formula for calculating uniform flow in pipes [J]. Yellow River,2006,28(2) :67-68. (in Chinese))

New approximate formula for circular cross section of normal depth

ZHAO Yan-feng^{1,2}, ZHU Han-ying³, WANG Zheng-zhong^{1,2}

(1. College of Water Resources and Architectural Engineering,

Northwest A & F University, Yangling 712100, China ;

2. Research Center of Water Engineering Safety and Disaster Prevention,

Northwest A & F University, Yangling 712100, China ;

3. Management Center of Weihe River and Chanhe River, Xi 'an Water Affairs Bureau, Xi 'an 710015, China)

Abstract : In order to provide simple, universal and high-precision formulas for circular cross sections of normal depth for the design of projects, dimensionless normal-depth parameters are introduced. The fundamental equations for circular cross sections of normal depth were identically transformed, and then the transformed equations were analyzed and treated based on the optimization and fitting principles. Accordingly, a new approximate formula for circular cross sections of normal depth was derived. The error analyses and the calculated results of engineering cases show that the proposed formula has a simple form, a wide application range, and high precision. The maximum relative error for the calculation of normal water depth is less than 0.74% for practical projects.

Key words : circular cross section ; normal depth ; formula