

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2010.05.017

非等间距 GM(1 , 1)模型的改进及预测分析

梅 红 ,孙泽信

(河海大学地球科学与工程学院 ,江苏 南京 210098)

摘要 :论述了非等间距 GM(1 , 1)模型的基本原理及精度评定方法 ,针对模型缺陷探讨了模型精度的主要影响因素 ,并就初值选取及模型背景值构造 2 个方面进行改进 ,建立了改进的非等间距 GM(1 , 1)模型 .运用改进的非等间距 GM(1 , 1)模型对某坝堤沉降进行预测分析 ,结果表明 ,改进后的非等间距 GM(1 , 1)模型较改进前具有更高的预测精度 ,在沉降预测中具有较高的应用价值 .

关键词 :非等间距 ;模型改进 ;预测分析

中图分类号 :U416.1 文献标志码 :A 文章编号 :1000-1980(2010)05-0569-06

坝堤的变形分析与预测 ,在坝堤的建设和使用过程中极为重要 .目前针对这类问题的研究理论和方法都很多 ,在沉降变形的小样本监测离散数列方面 ,灰色 GM(1 , 1)模型以其特有的优势得到了很好的应用 .灰色 GM(1 , 1)模型对数据的处理 ,不是求得数据的概率分布和统计规律 ,而是根据数据的处理方法找出数据间的规律 ,因而只需较少的数据^[1-2] .大量文献表明 ,灰色 GM(1 , 1)存在一些预测精度不高的情况 ,因此 ,对灰色 GM(1 , 1)模型进行深入的研究 ,找出影响模型精度的关键性因素并进行改进 ,提高灰色 GM(1 , 1)预测模型的精度 ,具有非常重要的理论意义和实际价值 .

本文从非等间距 GM(1 , 1)模型的基本原理出发 ,在对模型精度的主要影响因素进行分析的基础上 ,对模型初值选取以及背景值的构造 2 个方面进行改进 ,最后结合某坝堤沉降监测实例进行预测分析 .

1 非等间距 GM(1 , 1)模型的建模过程

传统的灰色 GM(1 , 1)模型是以等间隔数列为基础的 ,但在实际工程的变形监测中 ,观测数据的时间间隔往往呈现非等间隔的状态 ,这就限制了传统灰色 GM(1 , 1)模型的应用 .这时 ,需要把非等时间间隔转化为等时间间隔序列 .本文主要采用单位时段差系数修正法对原数据进行处理 ,再进行一次累加生成处理 ,进而形成非等间距 GM(1 , 1)模型^[3-5] .

设 $X^{(0)} = \{ x^{(0)}(t_i) | i = 1, 2, \dots, n \}$, $t_i \in R$, t_i 与 t_{i+1} 之间为任意非等间距 ,即 $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ 不为常数 .则平均时间间隔 Δt_0 为

$$\Delta t_0 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t_i = \frac{1}{n-1} (t_n - t_1) \tag{1}$$

单位时间差系数 $\mu(t_i)$ 为

$$\mu(t_i) = \frac{t_i - (i - 1) \Delta t_0}{\Delta t_0} \quad (i = \{ 1, 2, \dots, n \}) \tag{2}$$

各时段总的差值 $\Delta x^{(0)}(t_i)$ 为

$$\Delta x^{(0)}(t_i) = \mu(t_i) [x^{(0)}(t_{i+1}) - x^{(0)}(t_i)] \quad (i = \{ 1, 2, \dots, n-1 \}) \tag{3}$$

各等间隔点的灰数值 $x_1^{(0)}(t_i)$ 为

$$x_1^{(0)}(t_i) = x^{(0)}(t_i) - \Delta x^{(0)}(t_i) \quad (i = \{ 1, 2, \dots, n \}) \tag{4}$$

于是得到等间隔序列为

$$x_1^{(1)}(t) = \{x_1^{(1)}(1), x_1^{(1)}(2), \dots, x_1^{(1)}(n)\} \quad (5)$$

将 $x_1^{(1)}(t)$ 拟合成一阶线性微分方程,即

$$\frac{dx_1^{(1)}(t)}{dt} + ax_1^{(1)}(t) = u \quad (6)$$

式中: a, u 为待定常数, a 称为发展系数,其大小反映了序列 $x^{(0)}$ 的增长速度; u 称为灰色作用量,则可得到方程组:

$$B \cdot \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix} = Y \quad (7)$$

$$\text{其中 } B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[x_1^{(1)}(1) + x_1^{(1)}(2)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[x_1^{(1)}(2) + x_1^{(1)}(3)] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}[x_1^{(1)}(n-1) + x_1^{(1)}(n)] & 1 \end{bmatrix} \quad Y = [x_1^{(1)}(2) \quad x_1^{(1)}(3) \quad \dots \quad x_1^{(1)}(n)]^T$$

其法方程组为

$$B^T B \cdot \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix} = B^T Y \quad (8)$$

则最小二乘解为

$$[\hat{a} \quad \hat{u}]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (9)$$

得到时间响应函数为

$$\hat{a}_1^{(1)}(k+1) = \left[x_1^{(0)}(1) - \frac{u}{a} \right] e^{-ak} + \frac{u}{a} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

还原为非等间距数列中与时间 t 有关的函数(t 为距首次周期的时间间隔)为

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \left[x^{(0)}(1) - \frac{u}{a} \right] e^{-at/\Delta t_0} + \frac{u}{a} \quad (11)$$

$$\text{则 } \hat{x}^{(0)}(t) = \hat{x}^{(1)}(t) - \hat{x}^{(1)}(t - \Delta t_0) = (1 - e^{-a}) \left[x^{(0)}(1) - \frac{u}{a} \right] e^{-at/\Delta t_0} + \frac{u}{a} \quad (12)$$

将预测时间 t 代入式(12),即可求得预测值。

2 非等间距 GM(1,1)模型精度检验

建模的主要目的在于预测,为了评价预测的精度和效果,有必要对所建模型精度进行检验。灰色模型的精度通常采用后验差方法检验,其基本过程如下^[6]:

a. 计算残差,记 k 时刻 $x^{(0)}(k)$ 与 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 之差为

$$\delta(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k) \quad (13)$$

b. 计算原始数列和残差数列的方差:

$$S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [x^{(0)}(k) - \bar{x}]^2 \quad S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\delta^{(0)}(k) - \bar{\delta}]^2 \quad (14)$$

$$\text{其中 } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{(0)}(k) \quad \bar{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta^{(0)}(k)$$

c. 计算后验差比值 C 和小误差概率 p :

$$C = \frac{S_2}{S_1} \quad p = p\{|\delta(k) - \bar{\delta}| < 0.6745 S_1\} \quad (15)$$

d. 模型精度评定。指标 C 越小越好, C 越小,表示 S_1 越大而 S_2 越小, S_1 大,表示原始数据离散程度大; S_2 小,表示残差离散程度小。指标 p 越大越好, p 越大,表明残差与残差平均值之差小于给定值 $0.6745 S_1$ 的数据比较多。根据 C 与 p 2个指标,可综合评定模型精度。模型精度评定标准如表1所示。

3 非等间距 GM(1,1)模型精度影响因素分析

由非等间距 GM(1,1)模型的建立过程及其基本原理可知 , 影响该模型预测精度的因素主要有以下几个方面 (a)原始数据的选取. 构成非等间距 GM(1,1)模型的原始数据必须在正常的类似条件下得到 ,否则拟合所得的模型不具有较强的规律性. (b)初值的选取. 在传统的 GM(1,1)预测模型中 ,取 $x^{(0)}(1)$ 作为初值显然不太合理 ,因为模型的最佳拟合曲线有可能不通过 $x^{(1)}$ 序列中任何一个数据^[7-8]. (c)模型背景值的构造. 传统的灰色 GM(1,1)预测模型是基于对积分函数的近似 ,与实际情况不符. (d)非等间距 GM(1,1)模型是一指数模型 ,它反映的是变形体单纯随时效的变化情况. 如果有其他外界因素对变形或沉降产生较大影响 ,如荷载的突然变化 ,则会大大影响所建模型的精度^[9-10]. (e)数据维数的影响. 灰色模型针对不同的实际情况 ,存在着不同的最佳维数 ,只有选择了合适的维数 ,才可以使模型精度达到最佳^[11-12].

表 1 模型精度评定标准

Table 1 Assessment criteria for model precision

模型精度等级	小误差概率 p	后验差比值 c
1 级(好)	≥ 0.95	≤ 0.35
2 级(合格)	$0.80 \sim 0.95$	$0.35 \sim 0.50$
3 级(勉强)	$0.70 \sim 0.80$	< 0.70
4 级(不合格)	$0.50 \sim 0.65$	> 0.65

4 非等间距 GM(1,1)模型的改进

4.1 初值的改进

在传统的灰色 GM(1,1)模型中 ,取 $x^{(0)}(1)$ 作为初值. 但是由于模型的最佳拟合曲线有可能不通过 $x^{(1)}$ 序列中任何一个数据 ,因此 , $x^{(0)}(1)$ 作为初值并不合理 ,故须对其改进. 若要提高模型的精度 ,必须使残差数列的方差最小 ,故本文利用最小二乘法对初值进行改进. 即使

$$S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x^{(0)}(k) - \hat{x})^2 =$$
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ [x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)] - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)] \right\}^2 =$$
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \left[x^{(0)}(k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{(0)}(k) \right]^2 + \left[\hat{x}^{(0)}(k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{x}^{(0)}(k) \right]^2 - \right.$$
$$\left. 2 \left[x^{(0)}(k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{(0)}(k) \right] \left[\hat{x}^{(0)}(k) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{x}^{(0)}(k) \right] \right\} \tag{16}$$

达到最小.
求解方程

$$\frac{dS_2^2}{d\hat{x}^{(0)}(1)} = 0 \tag{17}$$

得到 $\hat{x}^{(0)}(1)$ 的最小二乘解为

$$\hat{x}^{(0)}(1) = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{R_1 + R_2} + \frac{\hat{u}}{\hat{a}} \tag{18}$$

其中

$$Q_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (x^{(0)}(k) - \bar{x}) \left[(1 - e^a) e^{-ak} - \frac{1}{n} e^{-(n-1)a} \right] + (x^{(0)}(1) - \bar{x}) \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(n-1)a} \right)$$
$$Q_2 = \frac{\hat{u}}{na} \sum_{k=1}^{n-1} \left[(1 - e^a) e^{-ak} - \frac{1}{n} e^{-(n-1)a} \right] \quad Q_3 = -\frac{\hat{u}}{a} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(n-1)a} \right)$$
$$R_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \left[(1 - e^a) e^{-ak} - \frac{1}{n} e^{-(n-1)a} \right]^2 \quad R_2 = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n} e^{-(n-1)a} \right)^2$$

4.2 背景值构造的改进

由式(6)可得

$$x^{(0)}(k+1) = x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) =$$
$$\int_k^{k+1} \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} dt = \int_k^{k+1} [-ax^{(1)}(t) + u] dt =$$
$$-az^{(1)}(k+1) + u \quad (k = 1, 2, \dots, m-1) \tag{19}$$

其中

$$z^{(1)}(k+1)=\int_k^{k+1}x^{(1)}(t)dt\quad(k=1,2,\dots,n-1)$$

(20)

称为模型背景值.但在传统的灰色GM(1,1)模型中,其背景值的构造采用

$$z^{(1)}(k+1)=\frac{1}{2}[x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k+1)]$$

(21)

从式(20)可以看出背景值 $z^{(1)}(k+1)$ 是 $x^{(1)}(t)$ 在区间 $(k,k+1)$ 上的定积分,而传统的背景值实际上是该定积分的近似算法,把 $x^{(1)}(t)$ 近似成一条直线.近似公式的误差有可能很大,导致模型预测的精度较低.因此,在其他条件不变的情况下,若要提高模型的预测精度,只有尽可能减少模型中背景值的计算误差.

从非等间距GM(1,1)模型的求解结果来看,可设

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=me^{pk}+q$$

式中 m,p,q 为3个独立的未知数.由此可知,每3个相邻的 $\hat{x}^{(1)}(t)$ 即可确定一个 $\hat{x}^{(1)}(t)$ 函数,即 $\hat{x}^{(1)}(k)$, $\hat{x}^{(1)}(k+1)$, $\hat{x}^{(1)}(k+2)$ 确定 $\hat{x}^{(1)}(k+1)$,这样就可以把整个 $\hat{x}^{(1)}(t)$ 拟合成 $n-1$ 个独立的指数函数.这将大大减少背景值构造计算误差,从而提高模型的预测精度.

则背景值计算公式为

$$z^{(1)}(k+1)=\int_k^{k+1}(me^{pt}+q)dt=\frac{m}{p}e^{pk}(e^p-1)+q$$

(22)

其中

$$m=\frac{[x^{(1)}(k+1)-x^{(1)}(k)]}{[x^{(1)}(k+2)+x^{(1)}(k)-2x^{(1)}(k+1)]e^{\ln\left\{\text{abs}\left[\frac{x^{(1)}(k+1)-x^{(1)}(k+2)}{x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k+1)}\right]\right\}_k}}$$
$$p=\ln\left[\text{abs}\left(\frac{x^{(1)}(k+1)-x^{(1)}(k+2)}{x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k+1)}\right)\right]$$
$$q=\frac{x^{(1)}(k+2)x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k+1)^2}{x^{(1)}(k+2)x^{(1)}(k)-2x^{(1)}(k+1)^2}$$

5 实例分析

某坝堤位于地质条件很差的软土地区,需要在坝堤全部施工阶段进行沉降观测,并通过变形分析和预报调节施工进度,以保证坝堤的施工安全.表2为坝堤某一沉降监测点的部分观测数据.

按照本文改进方法进行建模,并用改进的非等间距GM(1,1)模型对沉降进行预测分析.所建模型精度与改进前模型比较结果如表3所示.对模型进行不同的改进,改进后模型的精度等级如表4所示.沉降预测结果如表5所示.

表3 模型精度比较

Table 3 Comparative results of model precision

观测日期	实测值/ mm	改进前模型精度			改进后模型精度		
		拟合值/ mm	拟合值与 实测值 之差/mm	相对 误差/%	拟合值/ mm	拟合值与 实测值 之差/mm	相对 误差/%
2007-09-16	472.9	472.9	0	0	469.6	3.3	0.69
2007-09-26	530.8	531.9	1.2	0.22	531.2	-0.4	0.08
2007-10-08	561.4	550.5	-10.9	1.94	553.5	7.9	1.42
2007-10-19	582.0	566.3	-15.7	2.70	574.6	-7.3	1.31
2007-11-02	601.0	603.1	2.1	0.35	602.8	-1.1	0.31

表2 沉降观测数据

Table 2 Observed data of settlement

观测时间	观测值/mm	观测时间	观测值/mm
2007-09-16	472.9	2007-11-10	617.4
2007-09-26	530.8	2007-11-18	626.1
2007-10-08	561.4	2007-12-02	633.1
2007-10-19	582.0	2007-12-23	712.5
2007-11-02	601.0	2008-01-06	739.1

表4 模型的改进与精度等级

Table 4 Improvement and accuracy grade of model

改进方法选择	小误差 概率 p	后验差 比值 C	精度 等级
无	1	0.0926	一级
背景值改进	1	0.0921	一级
初值改进	1	0.0894	一级
背景值、初值改进	1	0.0880	一级

从表3可以看出,非等间距GM(1,1)模型改进后拟合值与实测值更加接近,改进前平均相对误差为1.04%,改进后平均相对误差为0.76%.模型的拟合精度有较大提高;从表4可以看出,所建的非等间距GM(1,1)模型的精度等级为一级,对模型进行改进后,后验差比值 C 变小,表明模型的改进是有效的;从表5预

测结果来看,预测值和实测值相当接近,改进前预测值的最大相对误差为 5.61%,最小相对误差为 0.73%,平均相对误差为 2.40%,改进后预测值的最大相对误差为 2.76%,最小相对误差为 0.34%,平均相对误差为 1.07%,表明改进后的非等间距 GM(1,1)模型可靠性更强,精度更高。

表 5 沉降预测结果

Table 5 Results of predicted settlement

观测日期	实测值/ mm	改进前预测精度			改进后预测精度		
		预测值/mm	拟合值与实测值 之差/mm	相对误差/%	预测值/mm	拟合值与实测值 之差/mm	相对误差/%
2007-11-10	617.4	621.9	- 4.5	0.73	619.5	2.1	0.34
2007-11-18	626.1	637.2	- 11.1	1.77	630.1	- 4.0	0.64
2007-12-02	633.1	668.6	- 35.5	5.61	650.6	- 17.5	2.76
2007-12-23	712.5	696.6	15.9	2.23	716.0	- 3.5	0.49
2008-01-06	739.1	751.2	- 12.1	1.64	747.3	- 8.2	1.11

6 结 论

- a. 从根据某坝堤沉降监测的 5 组数据所建模型的精度等级来看,非等间距 GM(1,1)模型比较适合小样本离散数据的处理,利用很少数据即可进行较为准确的预测分析。
- b. 对某坝堤沉降的预测分析结果表明:非等间距 GM(1,1)模型初值的选取及背景值的构造方法,都是影响 GM(1,1)模型预测精度的重要因素,改进后模型的预测精度有了更大的提高。
- c. 运用改进后的非等间距 GM(1,1)模型对后续 5 个观测时间的累积沉降量进行了预测,预测值较模型改进前与实测值更加接近,表明改进后的模型可靠性更强,精度更高,更适用于坝堤的沉降预测分析。

参考文献:

[1] 邓聚龙.灰理论基础[M].武汉:华中科技大学出版社,2002.

[2] XIE Nai-ming ,LIU Si-feng. Research on discrete grey model and its mechanism[C]//Systems ,Man and Cybernetics 2005 Proceeding of the IEEE International Conference.Piscataway :IEEE Xplore Digital Library 2005 606-610.

[3] 黄声享,李志成.工程建筑沉降预测的非等间距灰色建模[J].地理空间信息,2004,2(1):41-43.(HUANG Sheng-xiang ,LI Zhi-cheng.Grey modeling of non-equidistant data sepuent for forecasting subsidence of the engineering buildings[J]. Geospatial Information , 2004,2(1):41-43.(in Chinese))

[4] 谢乃明,刘思峰.离散 GM(1,1)模型与灰色预测模型建模机理[J].系统工程理论与实践,2005,25(1):93-99.(XIE Nai-ming , LIU Si-feng. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting mode[J].Systems Engineering-Theory & Practice 2005,25(1):93-99.(in Chinese))

[5] 郭丽萍,孙伟,郑克仁,等.非等时距 GM(1,1)直接模型及其在材料试验数据处理中的应用[J].东南大学学报:自然科学版,2004,34(6):833-837.(GUO Li-ping ,SUN Wei ,ZHENG Ke-ren ,et al. Non-equal interval GM(1,1) direct model and its application in processing of materials experimental data[J]. Journal of Southeast University :Natural Science Edition 2004,34(6):833-837.(in Chinese))

[6] 袁嘉祖.灰色系统理论及其应用[M].北京:科学出版社,1991.

[7] 张大海,江世芳,史开泉.灰色预测公式的理论缺陷及改进[J].系统工程理论与实践,2002,22(8):140-142.(ZHANG Da-hai , JIANG Shi-fang ,SHI Kai-quan.Theoretical defect of grey prediction formula and its improvement[J]. Systems Engineering-Theory & Practice 2002,22(8):140-142.(in Chinese))

[8] 唐万梅.几个预测方法及模型的研究[D].呼和浩特:内蒙古大学,2006.

[9] 谭冠军.GM(1,1)模型的背景值构造方法 and 应用[J].系统工程理论与实践,2000,20(4):98-103.(TAN Guan-jun.The structure method and application of background value in grey system GM(1,1) mode[J]. Systems Engineering-Theory & Practice 2000,20(4):98-103.(in Chinese))

[10] WANG Z G ,WU C D.The establishment and application of an improved GM(1,1) model[J]. Mathematics in Practice and Theory , 2003,33(9):20-25.

[11] 朱华吉,马少娟.非等时空距 GM(1,1)模型在建筑物沉降预测中的应用[J].测绘工程,2001,10(4):39-41.(ZHU Hua-ji ,MA Shao-juan.Application of non-equal interval gray model to forecast of building subsidence[J]. Engineering of Surveying and Mapping ,

2001, 10(4): 39-41.

[12] HUANG Y P. The identification of fuzzy grey prediction system by genetic algorithm[J]. International Journal of System Science, 1999, 29(4): 547-588.

Improvement and prediction of non-equal interval GM(1, 1) model

MEI Hong, SUN Ze-xin

(College of Geoscience and Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: The basic theory and the accuracy assessment method of the non-equal interval GM(1, 1) model were discussed. With regard to the model defects, the main influence factors of the model accuracy were studied. The non-equal interval model was improved from the two aspects of selection of the initial values and construction of model setting values. An improved non-equal interval GM(1, 1) model was thus established. The settlement of an embankment was predicted and analyzed by use of the improved model. The results show that the improved non-equal interval GM(1, 1) model has higher accuracy than before and has large value in predicting settlement of the embankment.

Key words: non-equal interval; model improvement; prediction

《河海大学学报(哲学社会科学版)》征订启事

(CN32-1521/C, ISSN1671-4970, 季刊, 自办发行)

《河海大学学报(哲学社会科学版)》以马列主义、毛泽东思想、邓小平理论和“三个代表”重要思想为指导,认真贯彻落实科学发展观,坚持实事求是的思想路线,贯彻“双百”方针,弘扬时代主旋律,理论联系实际,为社会主义物质文明与精神文明建设服务。

《河海大学学报(哲学社会科学版)》为哲学与社会科学类学术期刊,主要刊登哲学、政治学、文学、语言学、法学、社会学、经济学、管理学等社会科学方面的学术性文章,可供上述有关专业的研究人员、管理人员和大专院校师生阅读与参考。《河海大学学报(哲学社会科学版)》为中国学术期刊(光盘版)入编期刊与中国学术期刊网入编期刊。

《河海大学学报(哲学社会科学版)》由河海大学主办,每季末出版,国内外公开发行。2010年每本定价10元,每本邮费1元,全年订费44元,欢迎广大读者直接向编辑部订阅。

联系地址 南京市西康路1号《河海大学学报(哲学社会科学版)》编辑部

邮政编码 210098

电话/传真 025-83786376

E-mail: sxb@hhu.edu.cn

网址: http://kkb.hhu.edu.cn/sxb/index_sxb.htm