

DOI :10.3876/j.issn.1000-1980.2011.02.015

基于非结构网格的三维浅水模型

于守兵^{1,2},王万战¹,余 欣¹

(1.黄河水利科学研究院泥沙研究所,河南 郑州 450003 ; 2.南京水利科学研究院河流海岸研究所,江苏 南京 210024)

摘要 :采用水位积分平衡法并引入边壁滑移系数,解决 σ 坐标系下有限体积离散时产生的静水压力项与底坡项的平衡问题和边壁阻力的模拟问题,建立非结构网格上三维浅水模型.风生流试验计算结果表明,模拟的纵向流速的垂向分布与理论分布吻合较好;Holtz 丁坝试验计算结果表明,引入边壁滑移系数能够模拟坝体附近上游小回流区和下游小回流区.淹没丁坝试验计算结果表明,水位积分平衡法能够处理丁坝端坡和边坡等陡坡上的静水压力项与底坡项的平衡问题.

关键词 :三维浅水模型;非结构网格; σ 坐标系;有限体积法

中图分类号 :TV131 文献标志码 :A 文章编号 :1000-1980(2011)02-0195-06

对于河口、海洋和大型湖泊等水体,水流运动的垂向加速度远小于重力加速度,因此,在模拟这类水体流动中,基于静压假定的三维浅水模型得到广泛的应用.这些三维浅水模型在水平方向的求解较多采用结构网格上的有限差分法或有限体积法(FVM)和三角形网格的有限单元法,在垂向采用 σ 坐标或固定 z 坐标^[1].近些年来,非结构网格 FVM 研究取得很大进展,出现了一系列具有保持物理守恒性、对边界良好适应性和高精度捕捉间断能力的高性能计算格式^[2-3].一些学者将这类格式与垂向 σ 坐标相结合,建立了非结构网格上三维浅水模型^[4-5].

然而,三维浅水模型中还存在若干问题需要进一步探讨,如静水压力项与底坡项的平衡和非结构网格上的边壁阻力模拟等.本文采用平面三角形网格与垂向 σ 坐标剖分求解区域的方法,利用 FVM 离散三维浅水模型和标准 $k-\epsilon$ 紊流模型,运用 Roe 格式计算水平方向界面通量,建立非结构网格上的三维浅水模型,以解决 σ 坐标系下有限体积离散时产生的静水压力项与底坡项的平衡问题和边壁阻力的模拟问题.

1 模型控制方程

采用 σ 坐标能够很好地拟合地形起伏和水面波动,同时将垂向计算域转化为固定的矩形域 $[-1,0]$ ^[6].设水面方程为 $z = \zeta(x, y, t)$,底床方程为 $z = -h(x, y)$,则总水深 $H = \zeta + h$.引入 σ 坐标系 $(\alpha, \beta, \sigma, t^*)$ 算子和相应的垂向流速协变量 ω ,得到以向量形式表示的水流控制方程和标准 $k-\epsilon$ 紊流模型(方便起见,水平方向坐标和时间坐标仍以 x, y 和 t 表示).

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_{Hx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_{Hy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_V}{\partial \sigma} = \mathbf{S} + \mathbf{F}_{\text{diff}H} + \mathbf{F}_{\text{diff}V} \tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (H, Hu, Hv, H\Phi)^T & \mathbf{F}_{Hx} &= (Hu, Hu^2 + gH^2/2, Huw, Hu\Phi)^T \\ \mathbf{F}_{Hy} &= (Hv, Huv, Hv^2 + gH^2/2, Hv\Phi)^T & \mathbf{F}_V &= (\omega, \omega u, \omega v, \omega\Phi)^T \\ \mathbf{S} &= \left(0, gH \frac{\partial h}{\partial x}, gH \frac{\partial h}{\partial y}, S_\Phi \right)^T & \mathbf{F}_{\text{diff}H} &= [0, f_{\text{diff}H}(u), f_{\text{diff}H}(v), f_{\text{diff}H}(\Phi)]^T \\ f_{\text{diff}H}(\Phi) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(D_x \varphi_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(D_y \varphi_\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(D_x \varphi_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(D_y \varphi_\beta \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ \mathbf{F}_{\text{diff}V} &= \left[0, \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\nu_1}{H} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right), \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\nu_1}{H} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right), \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{D_\Phi}{H} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) \right]^T \end{aligned}$$

式中: $\mathbf{U}$ ——守恒变量; u —— x 方向流速; v —— y 方向流速; Φ ——某一标量; $\mathbf{F}_{Hx}$ —— x 方向对流通量; $\mathbf{F}_{Hy}$ —— y 方向对流通量; $\mathbf{F}_V$ —— σ 方向对流通量; $\mathbf{S}$ ——源项; $\mathbf{F}_{\text{diff}H}$ ——水平扩散通量,具体形式与采用的

扩散模型有关,本文模型采用守恒形式的扩散模型^[7]; $F_{\text{diff}V}$ ——垂向扩散通量; ν_t ——紊动黏性系数; D_ϕ ——扩散系数.

式(1)中相关的变换算子和 σ 坐标系下的标准 $k-\epsilon$ 紊流模型表达式见文献[4]. 水流模型开边界设置见文献[8].

2 模型中的几个问题处理

2.1 静水压力项与底坡项的平衡

与平面二维非结构网格上的 FVM 模型一样^[9], 三维非结构网格上的 FVM 模型同样存在静水压力项与底坡项的平衡问题. 考察 σ 坐标系下的三维浅水模型控制方程, 发现水平对流项和底坡项的表达形式与二维浅水模型控制方程的完全一样, 因此对某一控制体而言, 可以采用与二维情况下类似的处理方法.

文献[10]综述了常见的静水压力项与底坡项的处理方法, 并给出斜底模型下水深在控制体上线性分布时计算静水压力项的积分平衡法. 该方法考虑了静水压力项随水深的非线性变化, 能准确计算静水压力项沿控制体界面的分布. 在浅水流运动中, 尽管不同地方的静水深差别很大, 但是水位的变化往往很小. 因此, 可以将积分平衡法改进为水位积分平衡法, 即用水位代替总水深作为积分变量, 这样可以很大程度地减小计算误差. 相应的控制方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial Hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Hu^2}{2} + g\zeta(2h + \zeta)/2 \right] + \frac{\partial Hvu}{\partial y} + \frac{\partial \omega u}{\partial \sigma} &= g\zeta \frac{\partial h}{\partial x} + f_{\text{diff}H}(u) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\nu_t}{H} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right) \\ \frac{\partial Hv}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{Huv}{2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Hv^2}{2} + g\zeta(2h + \zeta)/2 \right) \right] + \frac{\partial \omega v}{\partial \sigma} &= g\zeta \frac{\partial h}{\partial y} + f_{\text{diff}H}(v) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\nu_t}{H} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) \end{aligned}$$

沿控制体某界面的静水压力项 P 和源项分别表示为

$$P = \frac{1}{6} gK (\zeta_0^2 + \zeta_1^2 + \zeta_0 \zeta_1 + \zeta_0 h_1 + \zeta_1 h_0 + 2\zeta_0 h_0 + 2\zeta_1 h_1) \quad (2)$$

$$S_{bx} = gA_\Omega \zeta \frac{\partial h}{\partial x} \quad S_{by} = gA_\Omega \zeta \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3)$$

式中: l ——控制体界面的边长; A_Ω ——控制体水平面面积; ζ_0, ζ_1 ——重构的界面两端的水位; h_0, h_1 ——界面两端的静水深; $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}$ —— x 和 y 方向的底床坡度, 在斜底模型下很容易求得.

式(2)的推导和格式“和谐”性证明可参考文献[10].

2.2 边壁阻力的模拟

一般在大尺度的水体模拟中, 边壁的影响范围有限, 往往被忽略. 然而在小尺度水体中, 如丁坝水槽试验中, 由于丁坝的长度一般很短, 相应的丁坝上游小回流区和下游小回流区的尺度也较小, 故边壁对丁坝附近局部流态的影响较大. 因此, 在数学模型中有必要考虑边壁阻力的模拟.

边壁阻力与底床摩阻在本质上是相同的, 原则上可采用类似的壁函数方法处理. 这样, 在边壁附近需要像在底床附近那样进行局部加密, 因而对平面非结构网格而言, 边壁处理变得很复杂, 且计算量也增加很多. 因此, 需要寻找一种简单的边壁阻力模拟方法.

从物理意义上讲, 底床摩阻由底床壁面附近动量的扩散通量表示. 同样地, 边壁阻力也可以由边壁附近动量的扩散通量表示. 边壁附近存在一很薄的边界层, 边界层内流速梯度很大, 边界层外流速与较远处流速相差很小, 故可以通过引入边壁滑移系数反映流速梯度的这种变化, 从而近似模拟边壁阻力.

求解边壁单元流速分布梯度重构节点处流速值时, 设 u_n 为边界节点流速值(根据以该节点为顶点的单元值插值得到), u_w 为重构的边界节点流速值, 则边壁滑移系数 β 可表示为

$$\beta = u_w / u_n$$

β 取值范围为 $0 \sim 1$, $\beta = 0$ 时为无滑移条件, $\beta = 1$ 时为完全滑移条件, $0 < \beta < 1$ 为部分滑移条件. β 取值视边界单元形心到边壁的距离而定, 距离越小则值越小, 距离越大则值越大.

3 数值离散方法

3.1 离散网格

定义流速(u, v 和 w)和紊动特征量的垂向位置在控制体的垂向中心(σ_{Cl}), 定义 σ 坐标系下垂向流速 ω

的垂向位置在控制体的界面(σ_{F1})上(图 1(a)). 定义流速(u, v, w 和 ω)和紊动特征量(k 和 ϵ)的水平位置在三角形的形心处(图 1(b)). 水平流速和紊动特征量与 σ 坐标系下的垂向流速呈交错分布. 这样布置使垂向对流项的计算变得很简单.

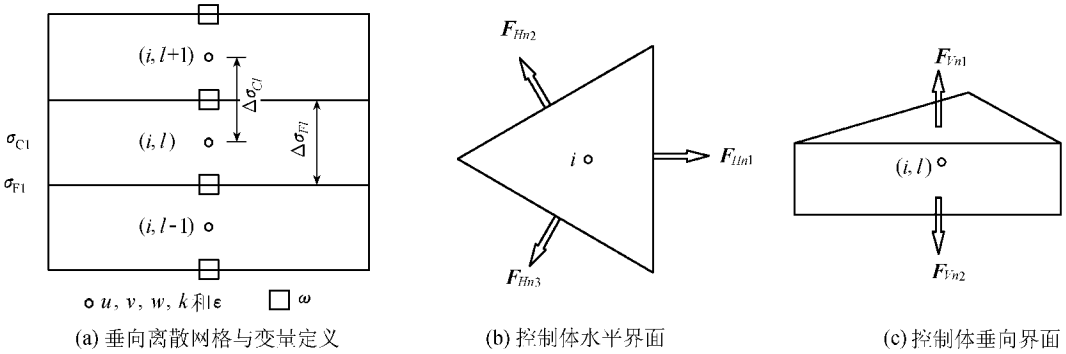


图 1 基于非结构网格的三维浅水模型变量定义和控制体界面

Fig. 1 Definitions of variables and interfaces of control volumes in 3-D shallow water model based on unstructured grids

3.2 控制方程离散

对控制方程(1)进 FVM 离散后得到 :

$$\frac{U_{i,l}^{n+1} - U_{i,l}}{\Delta t} + \frac{\sum_{j=1}^3 F_{Hnj} A_{\Omega Hj}}{V_{i,l}} + \frac{\sum_{j=1}^2 F_{Vnj} A_{\Omega Vj}}{V_{i,l}} = \frac{\sum_{j=1}^3 F_{diffHnj} A_{\Omega Hj}}{V_{i,l}} + \frac{\sum_{j=1}^2 F_{diffVnj} A_{\Omega Vj}}{V_{i,l}} + S_{i,l}$$

式中 : 上标 $n+1$ ——下一时刻(当前时刻 n 省略); $V_{i,l}$ ——控制体体积 ; F_{Hnj} ——水平对流项法向数值通量(图 1(b)); $A_{\Omega Hj}$ ——控制体第 j 垂向界面面积 ; F_{Vnj} ——垂向对流项法向数值通量(图 1(c)); $A_{\Omega Vj}$ ——控制体第 j 水平界面面积 ; $F_{diffHnj}$ ——水平扩散项数值通量 ; $F_{diffVnj}$ ——垂向扩散项数值通量.

动量方程的水平对流项采用 Roe 格式求解 , $k-\epsilon$ 的水平对流项按特征分解方式求解. 垂向对流项由于垂向流速定义在控制体上下界面上 , 净通量等于上界面通量减去下界面通量(若以图 1(c) 中方向所示 , 则为 $F_{Vn1} + F_{Vn2}$). 守恒型的水平扩散项采用高斯积分公式将面积分转化为沿边界的线积分 ; 垂向扩散项采用中心差分求解.

4 算例验证

4.1 风生流试验

风生流算例主要用来验证模型对水平流速垂向分布的模拟能力. 设计矩形封闭水池 , 长 2000 m , 宽 800 m , 深 10 m. 水面受沿 x 轴正向的恒定风应力 $\tau = 1.5 \text{ Pa}$ 作用 , 不考虑科氏力影响. 水池底部采用无滑移边界条件. 水体密度 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, 垂向紊动黏性系数 $\nu_t = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$. 该恒定流的水平流速沿垂向分布的解析解^[11]为

$$u = \frac{\tau \sigma H (3\sigma - 2)}{4\nu_t \rho}$$

水平方向采用尺度为 100 m 三角网格进行剖分 , 共生成 384 个网格(图 2(a)). 垂直方向等分为 10 层. 计算至收敛时可以看出 , 由于风场的持续作用 , 封闭水池内形成稳定的垂向环流(图 2(b) 和图 2(c)). 模拟得到的水池两端的水位升降为 0.019 m. 水池中心处纵向流速垂向分布的计算值和解析值吻合很好(图 2(d)).

4.2 Holtz 丁坝试验

试验在长 30 m、宽 2.5 m 的直立边壁水槽中进行^[12]. 底床糙率约为 0.02 , 平均水深为 0.230 m , 未受干扰区平均流速 0.345 m/s. 试验丁坝为矩形 , 长 0.25 m , 宽 0.05 m. 下游相对回流长度为 11.5.

收敛时计算的上下游水位差 0.0063 m , 实测的上下游水位差约 0.006 m , 说明底床阻力处理基本符合实际情况. 考虑边壁阻力时模拟得到的回流区(图 3(a)) 长度为 2.80 m , 为 11.2 倍相对坝长 , 与实测值很接近. 考虑和不考虑边壁阻力时丁坝附近的表层流场差别较大(图 3(b) 和图 3(c)). 考虑边壁阻力时 , 水位积分平衡法能够模拟丁坝上游和下游的小回流区.

4.3 淹没丁坝试验

淹没状态下有边坡和端坡的丁坝附近流场的模拟是为了检验水位积分平衡法对陡坡附近静水压力项和

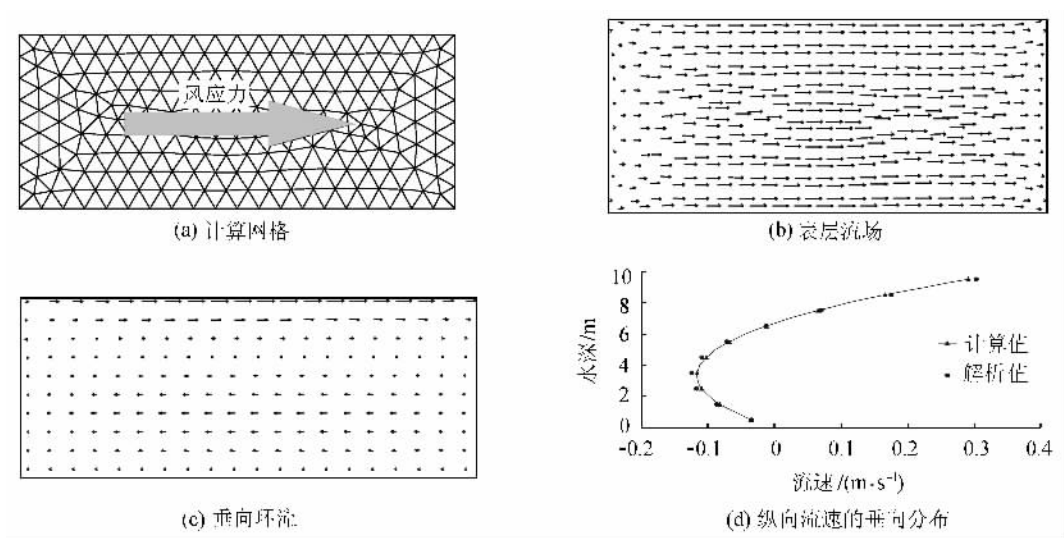


图 2 封闭水池内的风生环流算例

Fig. 2 Example of wind-driven circulations in closed basin

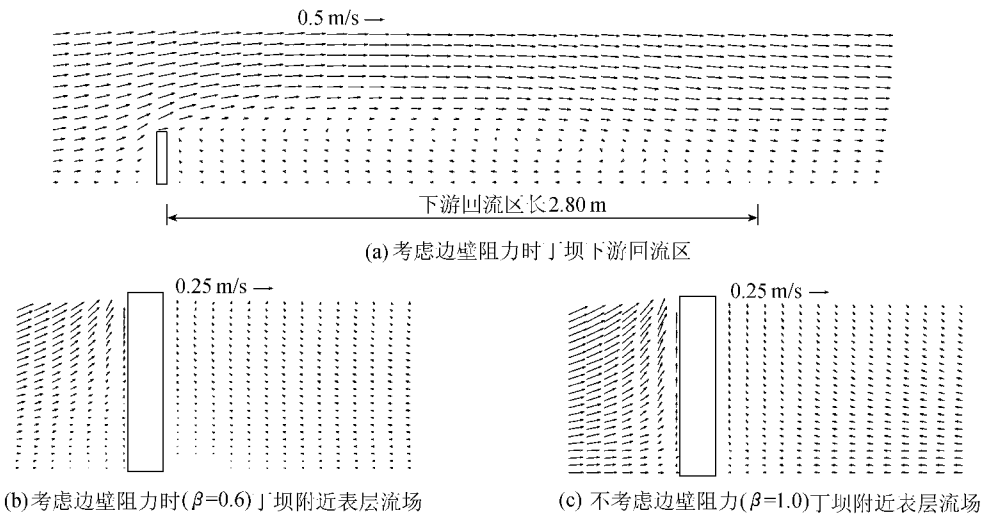


图 3 Holtz 丁坝水槽试验流场模拟

Fig. 3 Simulation of flow fields in Holtz's spur dike flume tests

底坡顶的处理效果.水槽试验条件和实测流速验证情况见文献 [13].本文简要介绍一个典型的试验组次的模拟结果.

试验水槽为平底,长 30 m,宽 6 m,平均糙率约为 0.012.丁坝坝体长 0.75 m,坝顶宽 0.02 m,坝身高 $D=0.10$ m,有效近似坝长 $L=1.00$ m,迎水边坡系数和背水边坡系数均为 1,坝头端坡系数为 5(图 4).上游单宽流量给定 为 $0.012\text{ m}^2/\text{s}$,下游水位(相对底床)控制为 0.12 m.平均水深约为 0.12 m,平均流速约为 0.10 m/s,丁坝布置在距上游边界 8 m 处.

数学模型中水槽和丁坝尺度与物理模型相同.水平方向采用 0.60 m 的三角形网格进行剖分,上游 $2L$ 和下游 $12L$ 区域内加密为 0.10 m,坝体本身加密为 0.01 m(图 5).可以看出,非结构网格在拟合丁坝体等水工建筑物中具有很好的适应性.端坡为 5 时剖分得到 22 226 个单元.垂向在 σ 坐标下分 10 层.计算中底床粗糙度取 $k_s=0.65\text{ mm}$,时间步长取 $\Delta t=0.002\text{ s}$.

计算至收敛后淹没丁坝附近表层平面流场、坝轴断面横向流速分布和纵剖面流场见图 6~8.由于淹没程度较小,丁坝下游平面出现回流区,坝轴断面上出现横向流动,受坝体阻挡的纵剖面下游出现横轴环流,这些典型流动特征的正确模拟体现了水位积分

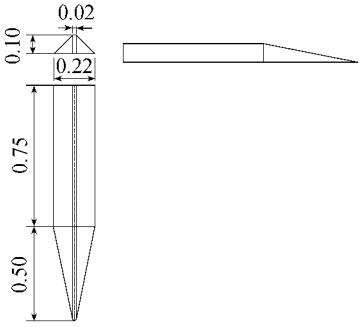


图 4 丁坝模型三视图(单位:m)

Fig. 4 View of a spur dike model(unit : m)

平衡法在处理诸如丁坝边坡和端坡等陡坡中的适应性.

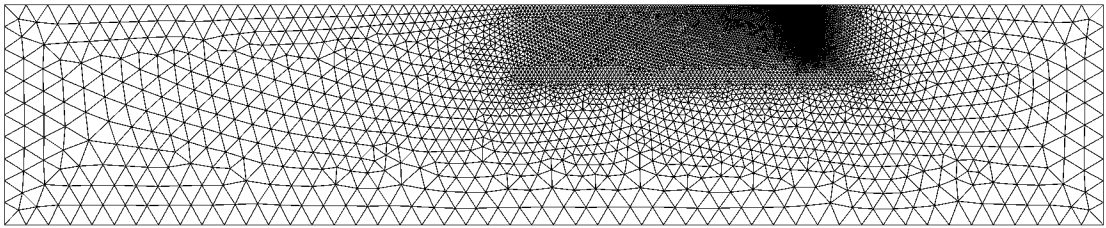


图 5 淹没丁坝三维水流数学模型平面网格剖分

Fig. 5 Plane grids of 3-D flow mathematical model in submerged spur dike tests

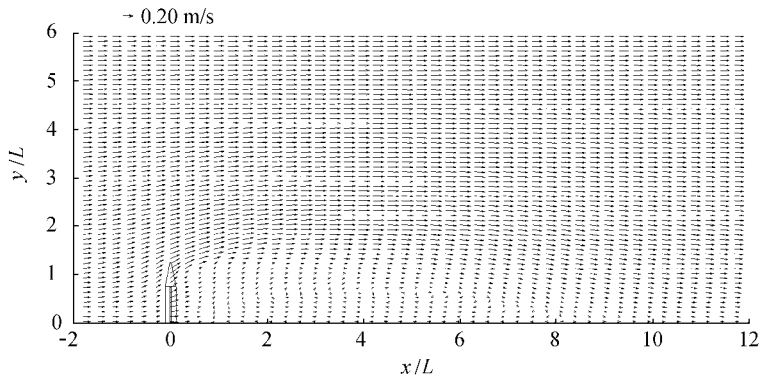


图 6 淹没丁坝表层 ($z/D = 1.1$) 平面流场

Fig. 6 Flow fields of surface plane ($z/D = 1.1$) in submerged spur dike tests

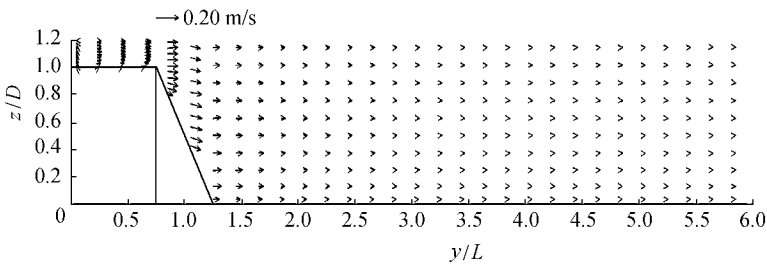


图 7 淹没丁坝坝轴断面 ($x/L = 0$) 横向流速分布

Fig. 7 Distribution of transverse flow velocity in axis section ($x/L = 0.0$) in submerged spur dike tests

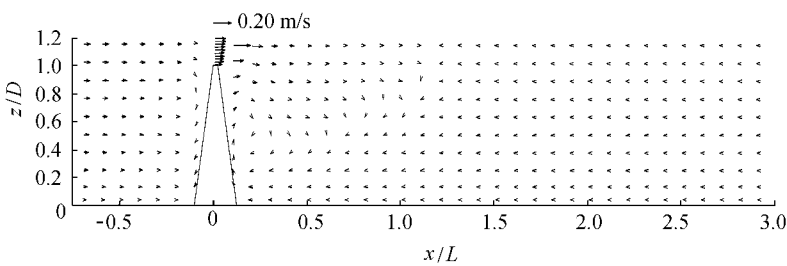


图 8 淹没丁坝纵剖面 ($y/L = 0.5$) 流场

Fig. 8 Flow fields of longitudinal section ($y/L = 0.5$) in submerged spur dike tests

5 结 论

a. 建立基于非结构网格和垂向 σ 坐标变换下的三维浅水模型. 非结构网格能够很好地拟合丁坝等水工建筑物边界, 并且能够很方便对工程附近区域加密.

b. 淹没状态下有边坡和端坡的丁坝附近流场计算结果表明, 水位积分平衡法较好地处理了三维浅水流动中的静水压力项和底坡项的平衡问题, 能够模拟出丁坝附近合理的流场分布特征. Holtz 丁坝试验计算结果表明, 考虑边壁阻力能够模拟丁坝附近局部小回流区. 引入边壁滑移系数能够很方便地处理非结构网格上

的边壁阻力模拟问题,

参考文献:

- [1] 刘桦,何友声.河口三维流动数学模型研究进展[J].海洋工程,2000,18(2):87-93.(LIU Hua,HE You-sheng. Recent development in 3-D hydrodynamic mathematical model studies for estuaries[J]. The Ocean Engineering,2000,18(2):87-93.(in Chinese))
- [2] 谭维炎.浅水动力学的回顾和当代前沿问题[J].水科学进展,1999,10(3):296-303.(TAN Wei-yan. A review of shallow-water hydrodynamics and some contemporary problems[J]. Advances in Water Science,1999,10(3):296-303.(in Chinese))
- [3] 孔俊,宋志尧,张红贵.非结构型浅水方程数值模式的建立及应用[J].河海大学学报:自然科学版,2006,34(4):456-459.(KONG Jun,SONG Zhi-yao,ZHANG Hong-gui. New non-structured numerical model for solving shallow water equation and its application[J]. Journal of Hohai University:Natural Sciences,2006,34(4):456-459.(in Chinese))
- [4] 李绍武,卢丽锋,时钟.河口准三维涌潮数学模型研究[J].水动力学研究与进展:A辑,2004,19(4):407-415.(LI Shao-wu,LU Li-feng,SHI Zhong. A quasi-3D numerical model for estuarine tidal bore[J]. Journal of Hydrodynamics:Series A,2004,19(4):407-415.(in Chinese))
- [5] 赖锡军,曲卓杰,周杰,等.非结构网格上的三维浅水流动数值模型[J].水科学进展,2006,17(5):693-699.(LAI Xi-jun,QU Zhuo-jie,ZHOU Jie et al. 3-D hydrodynamic model for shallow water on unstructured grid[J]. Advances in Water Science,2006,17(5):693-699.(in Chinese))
- [6] 陶建峰,张长宽.河口海岸三维水流数值模型中几种垂向坐标模式研究述评[J].海洋工程,2007,25(1):133-142.(TAO Jian-feng,ZHANG Chang-kuan. Review on several vertical coordinate modes of 3-D flow numerical model in estuarine and coastal waters[J]. The Ocean Engineering,2007,25(1):133-142.(in Chinese))
- [7] 于守兵. σ 坐标系下浅水方程水平扩散项守恒形式[J].海洋工程,2010,28(3):123-127.(YU Shou-bing. Conservative model of horizontal diffusion term of shallow water equations in σ coordinate[J]. The Ocean Engineering,2010,28(3):123-127.(in Chinese))
- [8] 谭维炎,胡四一.浅水流动计算中一阶有限体积法 Osher 格式的实现[J].水科学进展,1994,5(4):262-270.(TAN Wei-yan,HU Si-yi. Implementation of first-order finite-volume Osher scheme in shallow-water flow computation[J]. Advances in Water Science,1994,5(4):262-270.(in Chinese))
- [9] 于守兵.浅水方程无结构网格有限体积法研究进展[J].水运工程,2009(5):15-20.(YU Shou-bing. Research progress on shallow water equations simulating by FVM based on unstructured mesh[J]. Port & Waterway Engineering,2009(5):15-20.(in Chinese))
- [10] 于守兵.计算二维浅水方程中静水压力项与底坡项的积分平衡法[J].水利水电科技进展,2009,29(4):32-35.(YU Shou-bing. Integral balance method for computing stationary hydraulic pressure term and bed slope term in two-dimensional shallow water equation[J]. Advances in Science and Technology of Water Resources,2009,29(4):32-35.(in Chinese))
- [11] KOUTITAS C,O'CONNOR B. Modeling three-dimensional wind-induced flow[J].J Hydraulic Division,ASCE,1980,106:1843-1865.
- [12] HOLTZ K P. Numerical simulation of recirculating flow at groyne[C]//BREBBIA C A,QUAZAR D,BEN S D. Computer Methods in Water Resources:Proceedings of the 2nd Int. Conf. Yew York:Springer Verlag,1991:463-477.
- [13] 于守兵.淹没丁坝对水流结构的调整作用研究[D].南京:南京水利科学研究所,2010.

3-D shallow water model based on unstructured grids

YU Shou-bing^{1,2}, WANG Wan-zhan¹, YU Xin¹

(1. Sediment Department of Yellow River Institute of Hydraulic Research, Zhengzhou 450003, China;

2. River and Harbor Engineering Department of Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210024, China)

Abstract: The water-level integration balance method and the side wall sliding coefficient were employed to solve problems of balancing between hydrostatic pressure term and bed slope term arose in the finite volume method in the σ coordinate system and those of simulating side friction. A 3-D shallow water model was established based on unstructured grids. The computed results of wind-driven circulations show good agreement between the vertical distribution of simulated longitudinal velocity with the theoretical values. The results of Holtz's spur dike flume tests indicate that the side wall sliding coefficient can be used to simulate small upstream and downstream reverse zones near the spur dike. The results of the submerged spur dike tests show that the water-level integration balance method can be adopted to deal with the balance problem between hydrostatic pressure term and bed slope term of steep slopes such as end and side slopes of spur dikes.

Key words: 3-D shallow water model; unstructured grid; σ coordinate system; finite volume method